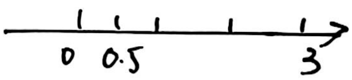
Lec 2.

Other Non-Axiomatic Definitions of Probability

Geometric：几何概型 ⇒ Infinite Sample Space
通过 length, area, volumn 等几何手段计算结果

有样本空间 S，A事件发生概率：$P(A) = \frac{M(A)}{S(A)}$
where $M(\cdot)$ is the measure of geometric region
Eg：x是 [0,3] 间随机一个实数，x 相比于距离1，更靠近0的概率？



$P(x \in [0, 0.5]) = \frac{1}{6}$

那么 $P(x=1.5)$ 呢？样本空间为 ∞，$P=0$，但它是不可能事件么？
不是！Impossible event：$A = \emptyset$，故 $P(A) = 0$
但现在是 $P(A)=0$，$A \neq \emptyset$，$S = \infty$，故不是；这两者不矛盾

概率有两种理解：frequency & belief
toss a coin，heads up：50%，那么意味着：不断抛，
有50%情况头朝上。因此：To some extent, probability represents a long-run frequency over a large number of repetitions of an experiment.
但有时，~~frequency may not exist~~，因为不是所有事件可实验！
这么看来，概率也是 a degree of belief about the event
比如：参选人能否赢下选举，明天下不下雨

Axiomatic Definition of Probability

Definition：对与有限样本空间 S，S 有限的子集事件满足以下公理：
① S 是一个事件 ② 对于每个事件 A，A^c 也是 event
③ 对于 event $A_1, A_2 \cdots$，the Union $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ 也是 event

No.

Date

从而引入：General Definition of Probability

概率空间由样本空间 S 和概率函数 P 组成

对于 $A \subseteq S$，$P(A) \in [0,1]$，且有：

① $P(\emptyset)=0$，　$P(S)=1$

② 若 $A_1, \cdots, A_n$ 为 disjoint events*，则

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$$

若 $A_1, \cdots, A_n$ 中，$\forall i \neq j$，$A_i \cap A_j = \emptyset$，称 $A_1, \cdots, A_n$ 为 disjoint events

有以下 property：

① $P(A^c) = 1 - P(A)$　② if $A \subseteq B$，$P(A) \leq P(B)$

③ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Bonferroni's Inequality：$A_1, \cdots, A_n$：有：

$$P(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) - (n-1)$$

证：$n=2$ 下：$P(A_1 \cap A_2) \geq P(A_1) + P(A_2) - 1$

i.e. $1 \geq P(A_1 \cup A_2)$ 成立

设 $n=k-1$ 下成立，有 $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \geq P(A_1) + \cdots + P(A_{n-1}) - n + 2$

则 $n=k$：$P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n)$*　$A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}$ 视为一个事件

$\geq P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) + P(A_n) - 1$　用　代入

$\geq P(A_1) + \cdots + P(A_{n-1}) + P(A_n) - n + 1$.　证毕

Inclusion - Exclusion Formula：$A_1 \cdots A_n$.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

$$+ \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$

例：一幅卡片，数字 $1 \sim n$，你每翻一张前报个数（按顺序 $1 \sim n$）

若第 i 次翻卡片正好数是 i，则 win．求 P？

所有 win event：按一定顺序下，必须有：ith card → 数为 i

No.

Date

记 $\xrightarrow{\text{ith card 为 i}}$ ~~从而~~ 赢为 A_i 事件：则 win: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

则 $P(A_1\cup\cdots\cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i\le j\le n} P(A_i\cap A_j) + \cdots$

$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = n\cdot\frac{1}{n} = 1$, $\sum_{1\le i\le j\le n} P(A_i\cap A_j) = \binom{n}{2}\cdot\frac{(n-2)!}{n!}$ *

* 记算 $A_i\cap A_j$ P时，不关心非i.j位的卡片是否需要顺序(th)与点数不一致！因容斥会自动扣除这种项！

有：$\sum_{\underbrace{1\le i\cdots\le j\le n}_{k个}} P(\underbrace{A_i\cap\cdots\cap A_j}_{k个}) = \binom{n}{k}\cdot\frac{(n-k)!}{n!}$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}$$

$\therefore P = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n!}$，当 $n\to\infty$ 时：

$\because e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots$

$\therefore$ 取 $x=-1$: $1 - \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{e^{-1}} \approx 63.21\%$

上述问题便是著名的 *De Montmort's Matching Problem*

Lec 3 Conditional Probability

一: Def & Property

Definition: If A. B are events with $P(B)>0$, then the conditional probability of A given B, denoted by $P(A|B)$, is defined as:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

在有了事件E的条件下: We update our beliefs to be consistent with this knowledge.

Property:

① if $A_1, \cdots, A_n$ are disjoint, then:

$$P(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j|E) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j|E).$$

② $P(A^c|E) = 1 - P(A|E)$.

$*$: $\forall i \neq j$: $A_i \cap A_j = \emptyset$, 且 $\bigcup_{i=1}^{n} A_j = S$

No.

Date

③

容斥原理: $P(A \cup B | E) = P(A|E) + P(B|E) - P(A \cap B | E)$

Chain Rule: 直观理解: 要$A_1 \cdots A_n$同时发生, 现A_1, 再在此基础上A_2, …

$$P(A_1, \cdots, A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1)\, P(A_3|A_1, A_2) \cdots P(A_n|A_1, \cdots, A_{n-1})$$

The Law of Total Probability:

Let $A_1, \cdots, A_n$ be a partition of Sample Space S, $*$
with $P(A_i) > 0$ for all i, Then:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\, P(A_j)$$ 此条也很直观

二: Independence of two Events:

A与B独立 if: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

i.e. $P(A|B) = P(A)$. $P(B|A) = P(B)$.

⚠ 独立不是 $A \cap B = \emptyset$! 而是两者间无影响关系!

Eg: 10-sides. die, $A = \{1, \cdots, 6\}$. $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

A. B间独立吗?

$P(B) = 1/2$ $P(B|A) = 1/2$ $P(B|A) = P(B)$, 独立

但显然: $A \cap B \neq \emptyset$

· Theorem: If A and B 独立, then A & B^c 独立
A^c & B 独立, A^c & B^c 独立.

证: $P(A \cap B) = P(A) P(B)$ 成立 ⇓

$P(A \cap B^c) = P(A)\, P(B^c) = P(A)\, (1 - P(B)) = P(A) - P(A)P(B)$

因为: $A\bar{B} = A - AB$, 维恩图可易证; $P(A^c \cap B)$同理

$P(A^c \cap B^c) = P[(A \cup B)^c] = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + \underbrace{P(A \cap B)}_{= P(A)P(B)}$

$= [1 - P(A)][1 - P(B)] = P(A^c)\, P(B^c)$

KOKUYO

No.

Date

Def: 三个事件 independent iff:

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$ $P(A\cap C)=P(A)P(C)$ $P(B\cap C)=P(B)P(C)$

$[P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)]$ ☆

Def: A&B are said to be conditionally independent given E if: $P(A\cap B|E)=P(A|E)P(B|E)$.

Independence Simplifies Computing:

若 $A_1,\cdots,A_n$ 独立, 则:

$$\begin{cases} P(A_1\cap A_2\cap\cdots A_n)=\prod_{j=1}^{n}P(A_j) \\ P(A_1\cup A_2\cup\cdots A_n)=1-\prod_{j=1}^{n}[1-P(A_j)] \end{cases}$$

若 $A_1,\cdots,A_n$ 在E事件下条件独立:

$$P(A_1\cap\cdots\cap A_n|E)=\prod_{j=1}^{n}P(A_j|E).$$

$$P(A_1\cup\cdots\cup A_n|E)=1-\prod_{j=1}^{n}[1-P(A_j|E)]$$

三. 贝叶斯: Bayes' Rule

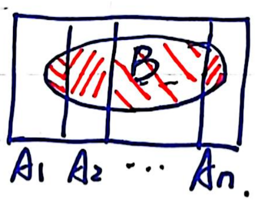
对于A.B两个events: $P(A|B)=\dfrac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)}.$

好理解! $P(A|B)P(B)=P(B|A)\cdot P(A)$, 都代表: A.B同时发生

Theorem: Let $A_1,\cdots,A_n$ be a partition of sample space S. 则任意 Event B 有:

$$P(A_i|B)=\frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B|A_j)}$$

直观理解:



已发生B, 那么是在A_i发生的前提下发生的B的概率

No.

Date

补充：离散中提及的 Distribution Problems

Type1: n labeled object → k labeled box，且第i个盒有n_i个球（限制条件）

一共 $\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$

Type2: n unlabeled objects → k labeled box

插板：一共 $\binom{n+k-1}{n}$ 种

Type3: n labeled objects → k unlabeled box

这个情况不是简单的排列组合传统题！

斯特林数（第二类）$S_2(n,j)$：n labeled object → j unlabeled box

（且：没有一个空盒！）

则 type3: $\sum_{i=1}^{k} S_2(n,i)$ ；而 $S_2(n,j) = \frac{1}{j!}\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\binom{j}{i}(j-i)^n$

Eg. Coupon问题：有108种卡，获取概率均等，抽n张 (n>200)，则凑齐108种概率？

一共：108^n 种；有凑齐的组合呢？$S_2(200,108)$.

$\therefore P = \frac{1}{108^n}\sum_{i=0}^{107}(-1)^k\frac{108!}{k!(108-k)!}\cdot(108-k)^n$