第九章 马尔可夫链

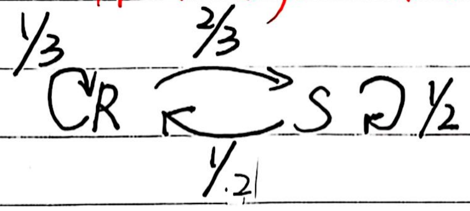
Def: 对于 R.V. 序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，序列中每个元素都在集合 $\{1,2,\cdots,M\}$ 中取值，若对于所有 $n \geq 0$ 有:

$$P(X_{n+1}=j \mid X_n=i, X_{n-1}=i_{n-1}, \cdots, X_0=i_0) = P(X_{n+1}=j \mid X_n=i).$$

则称 R.V. 序列为 Markov Chain

说白了就是 X_{n+1} 仅与 X_n 有关，i.e.，与上一状态有关

那么这种"转移"如何表示？令 $X_1, \cdots$ 为状态空间 $\{1,2,\cdots,M\}$ 上的Markov Chain，令 $q_{ij} = P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)$ 作为状态 i 转到 j 的概率，则得到的 $M \times M$ 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 则称为马尔可夫链的转移矩阵



可见，Q每一行和为1；如:

$$Q: \begin{array}{c|cc} & R & S \\ \hline R & 1/3 & 2/3 \\ S & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

那么假设 $i \to j$ 要求不再是一步呢？

Theorem: (n步转移概率): i 经过 n 步到 j:

$$q_{ij}^{(n)} = P(X_n=j \mid X_0=n)$$

则可得到关系: $q_{ij}^{(n)}$ 为 Q^n 的 (i,j) 项

那么有Q与initial distribution: $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_M)$，且:

$$\alpha_i = P(X_0=i), \quad i=1,\cdots,M$$

则n步后, X_n 在 $\{1,\cdots,M\}$ 状态上的分布为: αQ^n

More specifically: $P(X_n=j) = (\alpha Q^n)_j, \ j \in [1,M].$

Markov Chain 专业中还有许多性质及其对应引申的良好定理:

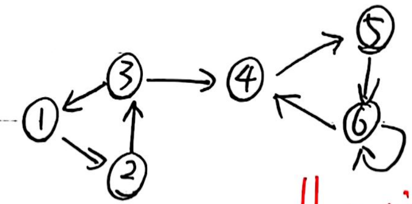
No.

Date

Category 1: 瞬时态(transient) & 常返态(recurrent).

Recurrent: Def: 从Markov Chain 状态i出发最终回到状态i的概率为1，则称状态i为常返态

反之，有概率再也回不到i ⇒ i为瞬时态

Eg: 

①②③ transient

④⑤⑥ recurrent

↳ 它可约

Category 2: 不可约(irreducible) & 可约(reducible)

Irreducible: 如果一个Markov Chain 任意两状态，通过有限步从i到j是可能的，则 不可约

反之，若∃i,j，i→j 不可能，则可约

由irreducible定义可知：若Markov Chain 不可约，则所有状态均为常返态。这一条较易说明。同时注意，逆命题是错的！如例:

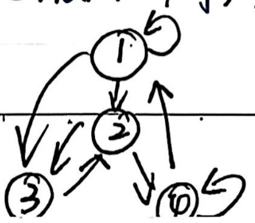
Category 3: 周期(period)

Def: 状态i的周期是所有的可能的从i返回i所需步数最大公约数。i.e.:

$$d(i) = \gcd\{n>0 : Q^{n}_{i,i} > 0\}$$

若周期为1，则i称非周期状态；若所有状态均aperiodic，则整个链条称为aperiodic

⚠: 还有一个前提！Markov Chain 不可约；无它，非不非周期均无所谈起！ Eg:



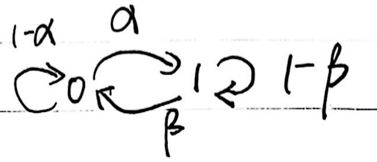
它 aperiodic

有了上述属性的引入，可以引伸许多的定理或 idea:

- Stationary: Def: $\vec{s}=(s_1,\cdots,s_n)$ s.t. $s_i\ge 0$ & $\sum_i s_i=1$, if $\sum_i s_i q_{ij}=s_j$, i.e., $\vec{s}Q=\vec{s}$

则 $\vec{s}$ 为稳态, or, 平稳分布

Theorem: 若 Q 中每一列概率和为1, 则 uniform 分布便是平稳分布 (易证!)

Eg:  , 则 Q: $\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1-\alpha & \alpha \\ 1 & \beta & 1-\beta \end{array}$.

$(S_0,S_1)\cdot Q=((1-\alpha)S_0+S_1,\ \alpha S_0+(1-\beta)S_1)=(S_0,S_1)$

$\therefore (S_0,S_1)=\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta},\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$

Theorem: 设一个 Markov Chain, state space 有限

① 若不可约, 则有唯一的平稳分布

② 若不可约且非周期, 平稳分布为 $\vec{s}$, 则 $P(X_n=i)$ 将收敛至 $s_i\,(n\to\infty)$; i.e., Q^n 中每一列都会趋于 $\vec{s}$

- Reversibility: 设有一序列 $\vec{s}=(s_1,\cdots,s_n)$, $s_i\ge 0$, $\sum s_i=1$, 使得: $s_i q_{ij}=s_j q_{ji}$ 对于 $\forall i,j$ 均成立, 则称:

Markov Chain 相对于 $\vec{s}$ 而言可逆

貌似这个定义不直观, 没啥用, 但事实上有用的很:

Theorem: 若不可约 Markov Chain 对 $\vec{s}$ 可逆, 则 $\vec{s}$ 是平稳分布.

Proof: $\sum_i s_i q_{ij}=\sum_i s_j q_{ji}=s_j\sum_i q_{ji}=s_j$

$\Rightarrow$ 若 Q symmetric, 则均匀分布便是平稳分布