No.

Date

# 课本拾遗

1. Bose - Einstein: n个物中抽k个（有放回），不考虑顺序，共$\binom{n+k-1}{k}$种

Hint: k个无法区分球进n个盒，则 n+k-1个位子上选k个放球；盒→物

2. $n\binom{n-1}{k-1}=k\binom{n}{k}$（队长），$\binom{m+n}{k}=\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$（范德蒙）

$$\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}=(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1 \quad \text{（合作伙伴）}$$

3. 容斥原理应用：

① Maximum-Minimum Identity: r.v. $x_i=1,2,\cdots,n$; $(x_i>0)$

$$\max_i x_i=\sum_i x_i-\sum_{i<j}\min(x_i,x_j)+\sum_{i<j<k}\min(x_i,x_j,x_k)+\cdots$$

Proof: 令 $A_i=[0,x_i]$，则 $A_1\cup\cdots\cup A_n=[0,\max_i x_i]$

$A_i\cap A_j=[0,\min\{x_i,x_j\}]$

因此：$A_1\cup\cdots\cup A_n=\sum_i A_i-\sum_{i<j}A_i\cap A_j+\cdots+(-1)^{n+1}A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$

$\therefore \max_i x_i=\sum_i x_i-\sum_{i<j}\min(x_i,x_j)\cdots+(-1)^{n+1}\min(x_1,\cdots,x_n)$.

② Montmort 配对：洗n张牌，标 $1\sim n$，若 label = order index，则 X++。考虑这个 r.v. X，则

a. $E(X)$? $I_j, j\in[1,n]$, $I_j=1$ if j-th card's label is j

$E(X)=E(\sum_{j=1}^{n}I_j)=\sum_{j=1}^{n}P_j=n\cdot P_j=n\cdot\frac{1}{n}=1$

b. $Var(X)$? 妙用 $E[\binom{X}{2}]$: $E[\binom{X}{2}]=\sum_{i<j}I_iI_j=\binom{n}{2}I_iI_j$,

对于 $I_iI_j$，仅 i-th & j-th card 都OK才行，则 $P_{ij}=\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)}$

$\therefore Var(X^2)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{2}E(X^2-X)+\frac{1}{2}E(X)+1^2$

$=E[\binom{X}{2}]+\frac{3}{2}=\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n(n-1)}+3/2=2$

c. 至少有一张牌满足：label = order 的概率：

令 $A_i$ 代表 i-th card label 为 i 的事件，则欲求：

$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$ （有 $j\in[1,n]$ s.t. $A_j=1$，那便符合）

而：$A_1\cup A_2\cdots\cup A_n=\sum_i A_i-\sum_{i<j}A_i\cap A_j+\sum_{i<j<k}A_i\cap A_j\cap A_k\cdots$

KOKUYO

No.

Date

而：$A_i\cap A_j=\frac{1}{n(n-1)}$，$A_i\cap A_j\cap A_k=\frac{1}{n(n-1)(n-2)}\left(=\frac{(n-3)!}{n!}\right)\cdots$

$\therefore P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\cdots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n!}$.

反面：n-k 中有一个对。

(d). PMF? $P(X=k)$：k个牌对，剩下 n-k个都不对。

$\therefore$ 易得：$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot\frac{(n-k)!}{n!}\left[1-\left(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\cdots\right)\right]$.

$=\frac{1}{k!}\sum_{i=2}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}$

Taylor 级数.

特别地：$\lim_{n\to\infty}P(X=k)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k!}\underbrace{\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}}=\frac{\boxed{e^{-1}}}{k!}=\frac{(1)^k\cdot e^{-1}}{k!}$

$X\sim Pois(1)$.

☆：重新提供了审视"至少发生一次"的角度．如生日-季节问题

③ 证容斥原理：设 $A_1,\cdots,A_n$ 一系列事件，则 $I(A_j)=\begin{cases}1, & A_j\text{发生}\\ 0, & A_j\text{未发生}\end{cases}$.

$1-I(A_1\cup\cdots\cup A_n)=I(A_1^c\cap\cdots A_n^c)$.

$=(1-I(A_1))\cdots(1-I(A_n))$

$=1-\sum_i I(A_i)+\sum_{i<j}I(A_i)I(A_j)+\cdots+(-1)^n I(A_1)\cdots I(A_n)$.

$\therefore$ 处理后左右同取期望：

$P(A_1\cup\cdots\cup A_n)=\sum_i P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i)P(A_j)+\cdots+(-1)^{n+1}P(A_1)\cdots P(A_n)$.

i.e., $A_1\cup\cdots\cup A_n=\sum_i A_i-\sum_{i<j}A_i\cap A_j+\cdots+(-1)^{n+1}A_1\cap\cdots\cap A_n$

4. 证明 $X\sim Pois(\lambda_1)$ $Y\sim Pois(\lambda_2)$，则 $X+Y\sim Pois(\lambda_1+\lambda_2)$ (X，Y独立)

Proof：泊松分布PGF定义为 $E(t^X)=e^{\lambda(t-1)}$

$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}t^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}(t\lambda)^k}{k!}e^{\lambda t-\lambda}\right)$.

则 $E(t^{X+Y})=e^{\lambda_1(t-1)}\cdot e^{\lambda_2(t-1)}=e^{(\lambda_1+\lambda_2)(t-1)}\sim Pois(\lambda_1+\lambda_2)$

△：巧妙抓住 Pois 中 $k\geq 0$，与 PGF 挂钩

5. 几何分布是无记忆的，事实上，Geom 是离散分布中唯一的无记忆分布

No.
Date

朝花夕拾

Sping 24.

1. "$E(t^x)$"问题中，最后得到了多项式，但如何展开得 $P_k$？

如：$E(t^x)=\frac{t^4}{6^4}(1+t+t^2+\cdots+t^5)^4$，欲求 $t^{15}$. $t^{16}$ 系数

Pipeline：$E(t^x)=\frac{t^4}{6^4}(1-t^6)^4(1+t+t^2+\cdots)^4$

※ $(1-t)(1+t+\cdots+t^5)=(1-t^6)$，$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2\cdots$

则：以 $t^{15}$ 为例，$15-4=11$，$11=\underset{\smile}{6}+5=0+11$.

① 4个中挑1个 $t^6$，且有1个 $(-1)$；而 $(1+t+t^2\cdots)^4$ 中，相当于插板子问题（且允许0的存在），则：$\left.\binom{k-1+4}{4-1}\right|_{k=5}$

∴ 这种情况：$\binom{4}{1}(-1)^1\binom{8}{3}=-224$

② 4中挑0，0个 $-1$；再插板子：则：

$\binom{4}{0}(-1)^0\binom{14}{3}=364$　∴ $t^{15}$ 系数：$\frac{364}{6^4}$

上述解法最大的要求在于：$(1+t+t^2\cdots+t^5)^4$ 中 $t^i$ 系数相同，以追求 $(1+t+\cdots+t^5)=\frac{1-t^6}{1-t}$

2. 下列 Theorem 的使用：

i.i.d 实验，每个要么S要么F，$P_i$ 为第i次 Succeed 概率，$q_i=1-P_i$

$b_i=q_i-\frac{1}{2}$。$A_n$：S次数为偶

则：$\begin{cases} n=2, \quad P(A_2)=\frac{1}{2}+2b_1b_2 \\ P(A_n)=\frac{1}{2}+2^{n-1}b_1b_2\cdots b_n \end{cases}$

上述中，$b_i=q_i-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-P_i$ 的换元是核心！

△：此结论在 2022 Fall $T_3$ 中也出现了

而在书上对应位置：$P_{65}$ $T_{43}$（第二章习题；翻译版）.

No.

Date

3. 错排问题 (derangement). (书 P18) (MontMort).

后续会 Cover 到

2022 Fall.

1. $\frac{t^4}{18^4}(6+3t+3t^2+2t^3+2t^4+2t^5)^4$ 求 $t^{16}$ 系数.

此处就没有之前那样好的性质了

Sol:

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 36 | 18 | 18 | 12 | 12 | 12 | | | | | |
| | 18 | 9 | 9 | 6 | 6 | 6 | | | | |
| | | 18 | 9 | 9 | 6 | 6 | 6 | | | |
| | | | 12 | 6 | 6 | 4 | 4 | 4 | | |
| | | | | 12 | 6 | 6 | 4 | 4 | 4 | |
| | | | | | 12 | 6 | 6 | 4 | 4 | 4 |

$\Rightarrow$ 36 36 45 42 45 48 28 20 12 8 4

36 36 45 42 45 48 28 20 12 8 4

系数为 $\frac{45\times4+42\times8+\cdots+28\times28+20\times48+\cdots+4\times45}{18^4}=\frac{4816}{18^4}$

2. Distribution Distance 证明 (后续 Cover)
3. 容斥原理 证 maximum-minimum Identity

2023 Spring:

1. Indicator 使用; $E[\binom{X}{2}]$ 妙用以求 Var. (后续 Cover).
2. 抛硬币第一次见规律 (鱼骨图与 PGF $\Leftrightarrow$ 期望).