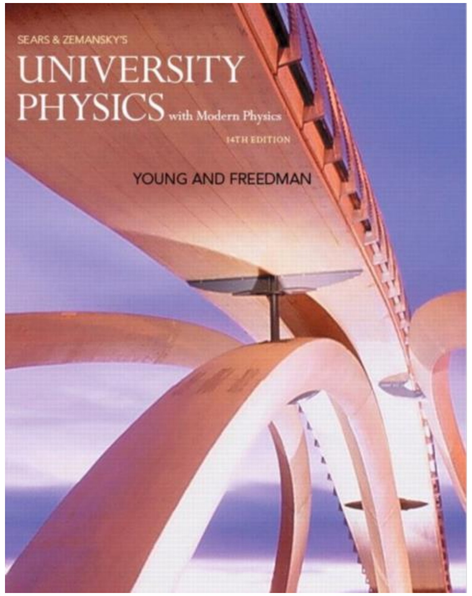
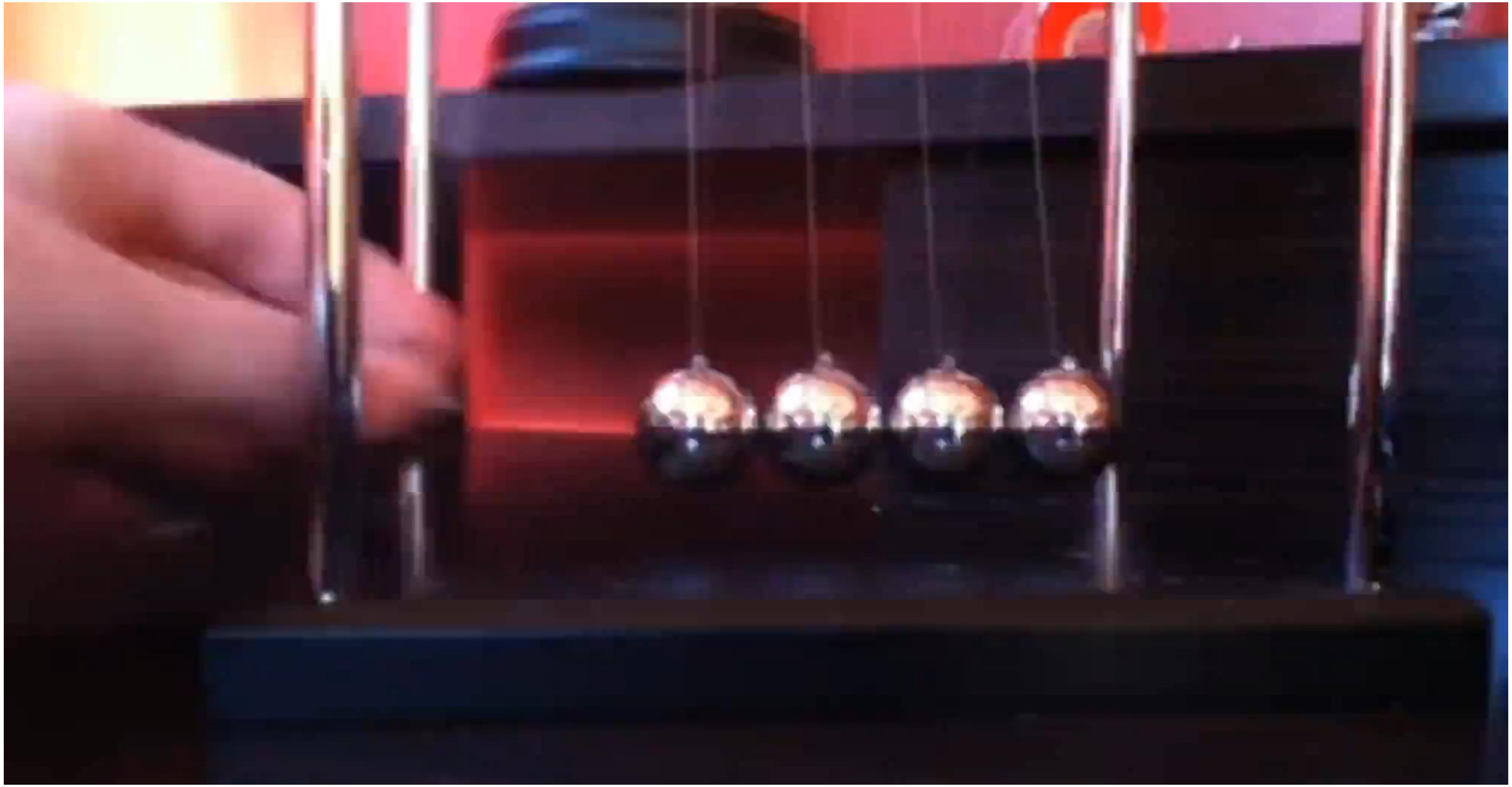
普通物理I PHYS1181 第7讲

质点系的内力和外力 质心
质心运动定理

动量定理 动量守恒定律





牛顿摆，最直观的动量变化演示

7.1 质点系的内力和外力 质心 质心运动定理

一、质点系的内力与外力

内力（internal force）:质点系内各个质点间的相互作用。

外力（external force）:质点系外物体对系统内质点所施加的力。

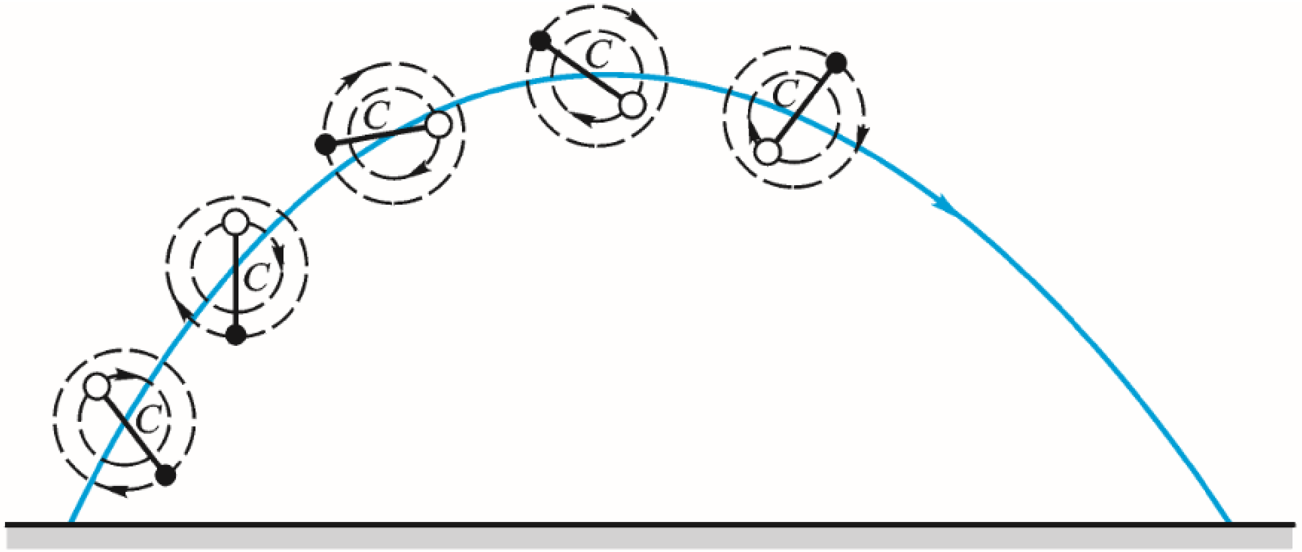
系统内，内力是成对出现的。

系统的内力之和为零，对整体运动不发生影响。

二、质心

考虑由刚性轻杆连接的两个小球系统

将它斜向抛出，轻杆中心某点c作抛物线运动

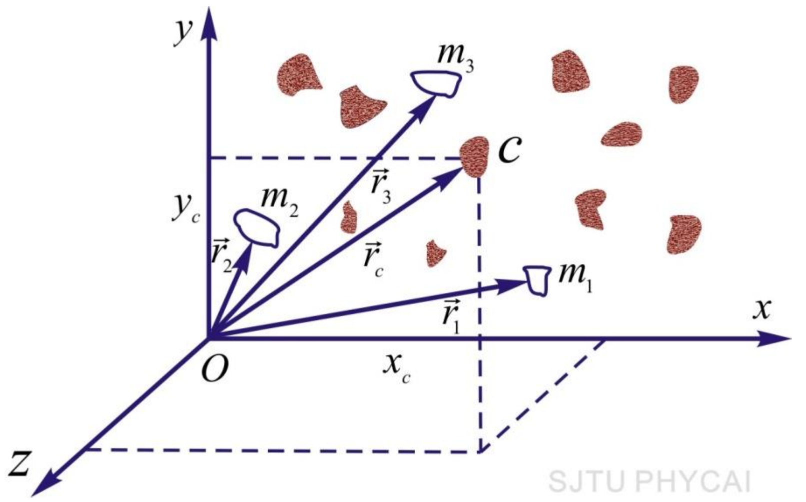


质心（**center of mass**）是与质量分布有关的一个代表点，它的位置在平均意义上代表着质量分布的中心。

对于N个质点组成的质点系：

$$m_1, m_2, \cdots, m_i, \cdots, \quad m_N$$

$$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_i, \cdots, \quad \vec{r}_N$$



质心的位矢：$\vec{r}_C = \sum \dfrac{m_i \vec{r}_i}{m}$

$$(m \equiv \sum m_i)$$

直角坐标系中的分量式：

$$\begin{cases} x_C = \sum \dfrac{m_i x_i}{m} \\ y_C = \sum \dfrac{m_i y_i}{m} \\ z_C = \sum \dfrac{m_i z_i}{m} \end{cases}$$

对于质量连续分布的物体

质心的位矢： $\vec{r}_C = \int \frac{\vec{r}\,\mathrm{d}m}{m}$ $\qquad (m = \int \mathrm{d}m)$

分量式：
$$\begin{cases} x_C = \int \frac{x\,\mathrm{d}m}{m} \\ y_C = \int \frac{y\,\mathrm{d}m}{m} \\ z_C = \int \frac{z\,\mathrm{d}m}{m} \end{cases}$$

线分布 $\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}l$

面分布 $\mathrm{d}m = \sigma\,\mathrm{d}S$

体分布 $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$

注意：质心与重心（center of gravity）是两个不同的概念，重心是地球对物体各部分引力的合力(即重力)的作用点，质心与重心的位置不一定重合。

三、质心运动定理

由质心位矢公式：$\vec{r}_C = \dfrac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$

质心的速度为

$$\vec{v}_C = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\sum m_i \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i}$$

质心的加速度为

$$\vec{a}_C = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\sum m_i \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{\sum m_i}$$

由牛顿第二定律得

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \cdots + \vec{F}_{1n}$$

$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \cdots + \vec{F}_{2n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_n\vec{a}_n = \vec{F}_n + \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \cdots + \vec{F}_{n(n-1)}$$

对于系统内成对的内力

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0, \cdots, \vec{F}_{in} + \vec{F}_{ni} = 0, \cdots$$

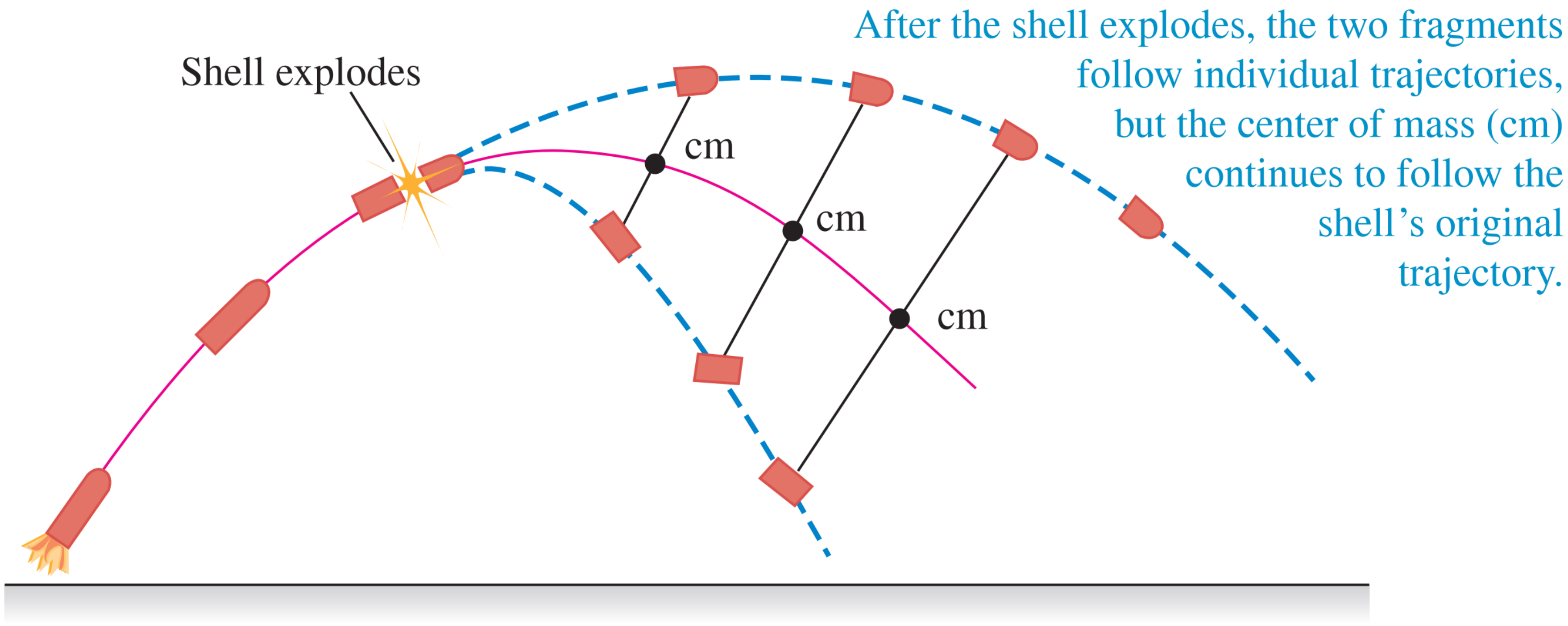
$$\therefore \sum m_i\vec{a}_i = \sum \vec{F}_i$$

由 $\vec{a}_C = \dfrac{\sum m_i\vec{a}_i}{\sum m_i}$ $\Rightarrow$ $\sum \vec{F}_i = m\vec{a}_C$

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{a}_C$$

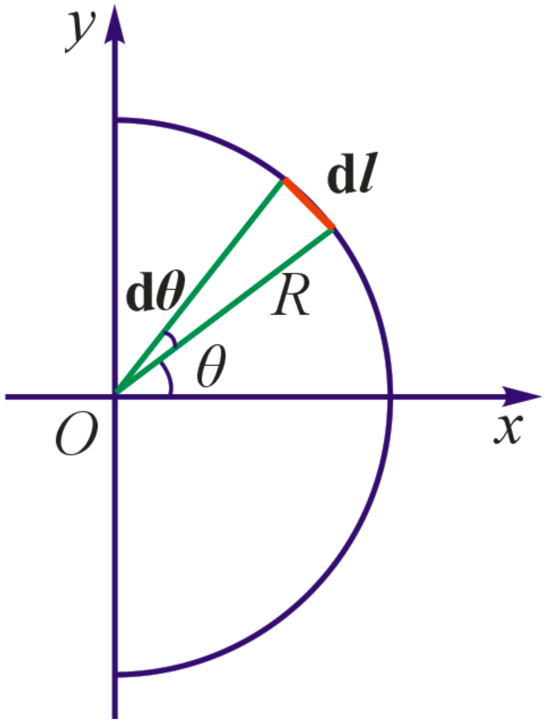
质心运动定理：

质心的运动等同于一个质点的运动，这个质点具有质点系的总质量，它受到的外力为质点系所受的所有外力的矢量和。

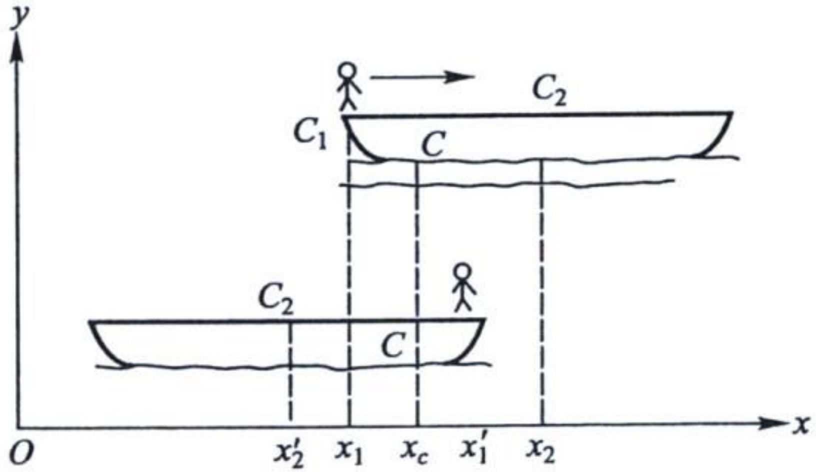


受到重力。虽然在运动中炮弹和弹壳分离，各自沿新的轨迹运动，但它们的质心仍然沿原来的抛物线运动。

例7-1 一般均匀铁丝弯成半圆形，其半径为R，质量为m，求此半圆形铁丝的质心。



例7-2 质量为m_1、长为L的木船浮在静止的河面上。今有一质量为m_2的小孩以时快时慢不规则速率从船尾走到船头。假设船和水之间摩擦不计，求船相对于岸移动了多少距离。



7.2 动量定理 动量守恒定律

一、质点的动量定理

由牛顿运动定律：

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}\vec{p}=\vec{F}\cdot\mathrm{d}t$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,\mathrm{d}t=\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2}\mathrm{d}\,\vec{p}=\vec{p}_2-\vec{p}_1$$

即**质点动量的变化，等于力对时间的积分。**

其中，$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,\mathrm{d}t$ 表示力对时间的累积量，叫做**冲量（impulse of force）**。

冲量就是度量动量变化的物理量。

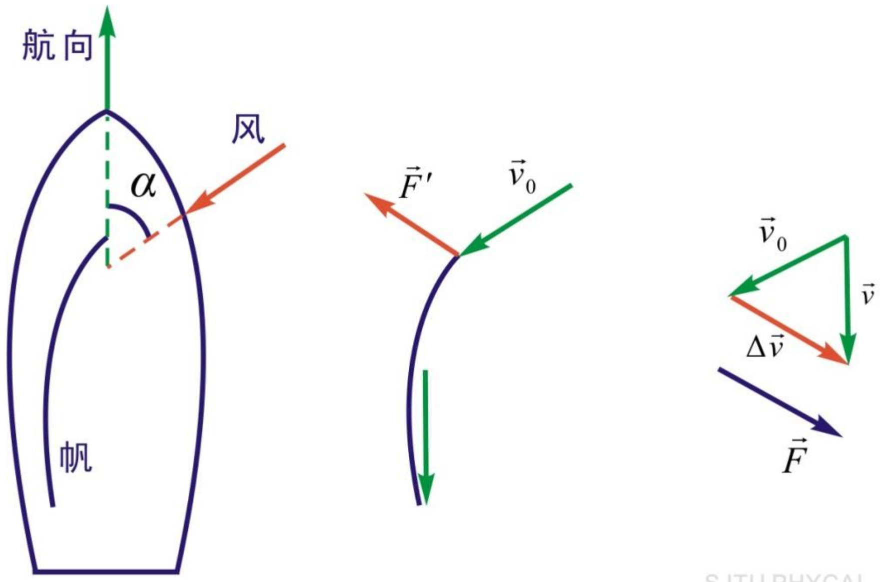
$$\vec{I} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

动量定理（theorem of momentum）： **质点在运动过程中，所受合外力的冲量等于质点动量的增量。**

讨论

(1) 冲量 $\vec{I}$ 的方向和大小是由所有微分冲量 $\vec{F}\mathrm{d}t$ 的合矢量来决定。动量定理反映了力在时间上的累积作用对质点产生的效果。

逆风行舟的分析：



(2) 动量定理是矢量方程，可以写成分量形式

$$I_x = \int_{t_0}^{t} F_x \mathrm{d}t = mv_x - mv_{x0}$$

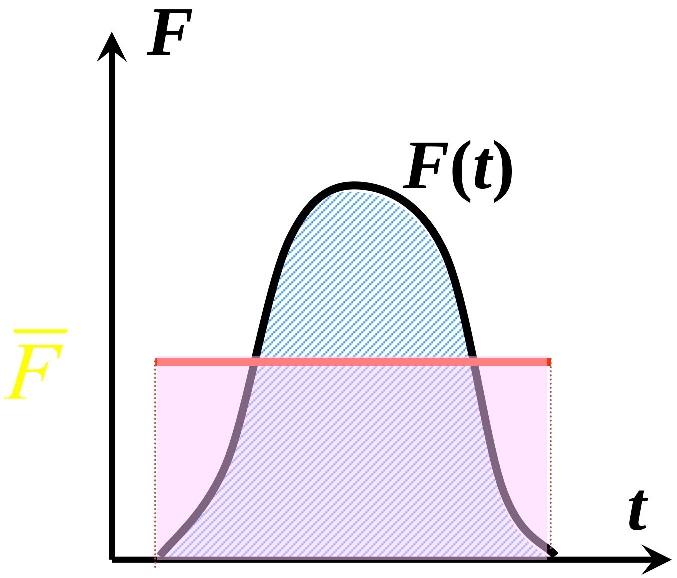
$$I_y = \int_{t_0}^{t} F_y \mathrm{d}t = mv_y - mv_{y0}$$

$$I_z = \int_{t_0}^{t} F_z \mathrm{d}t = mv_z - mv_{z0}$$

(3) 在 冲击、 碰撞问题中估算平均冲力（impulsive force）。

$$\overline{\vec{F}} = \frac{\vec{I}}{\Delta t} = \frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} \vec{F} \cdot \mathrm{d}t$$

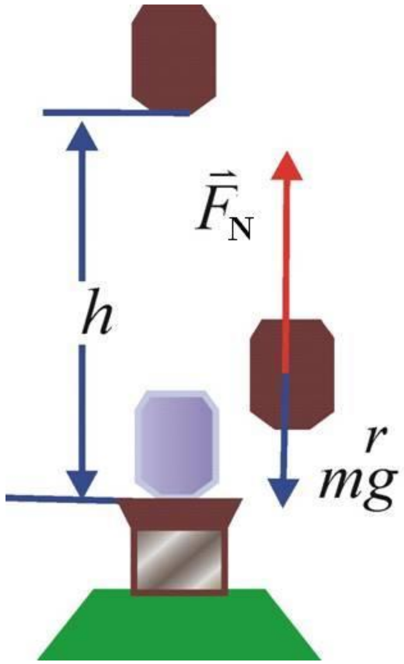
$$= \frac{\vec{p} - \vec{p}_0}{t - t_0}$$



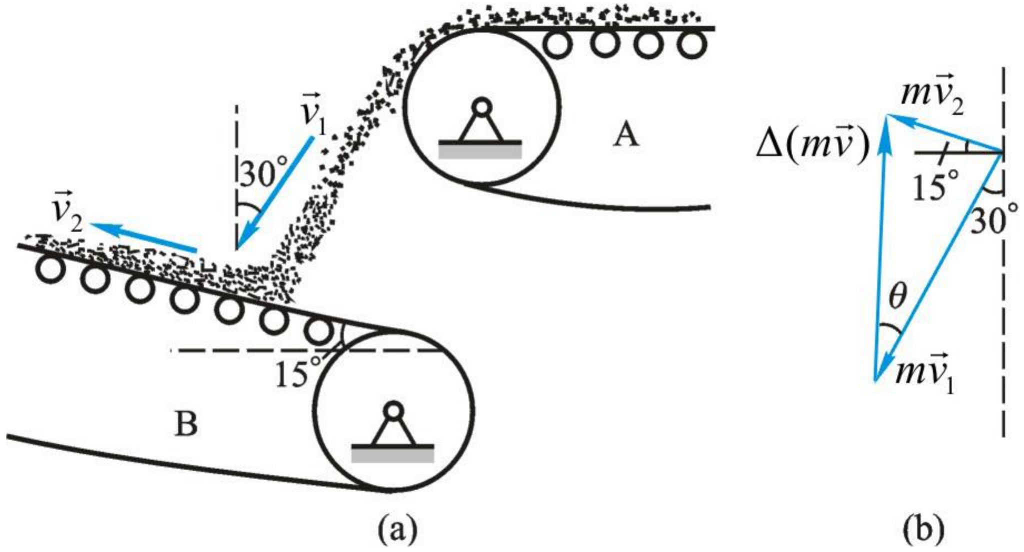
(4)当物体质量改变时，牛顿第二定律不适用。但动量定理在处理变质量问题时很方便。

(5)动量定理是牛顿第二定律的积分形式，只适用于惯性系。

例7-3 质量m =0.3 t的重锤，从高度h =1.5 m处自由落到受锻压的工件上，工件发生形变。如果作用的时间(1)τ=0.1 s， (2)τ=0.01 s 。试求锤对工件的平均冲力。

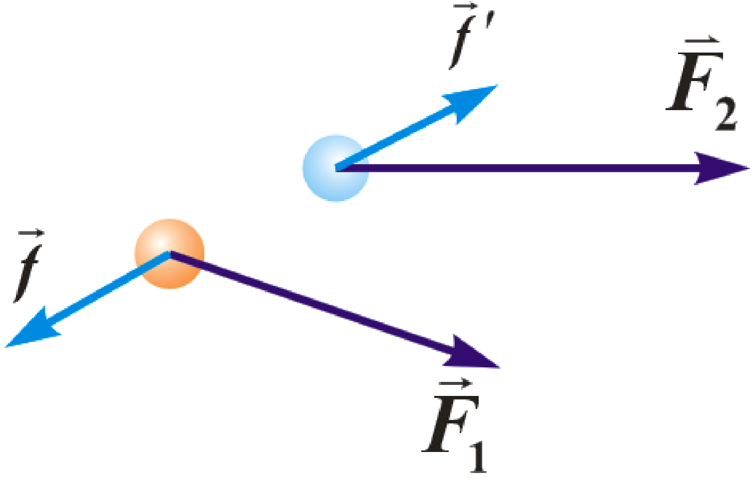


例7-4 矿砂从传送带A落到另一传送带B，其速度v_1=4 m/s，方向与竖直方向成30°角，而传送带B与水平成15°角，其速度v_2=2 m/s。如传送带的运送量恒定，设为k=20 kg/s，求落到传送带B上的矿砂在落上时所受到的力。



二、质点系的动量定理

考虑两个质点的系统



$$(\vec{F}_1 + \vec{f})\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}_1$$

$$(\vec{F}_2 + \vec{f}')\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}_2$$

两式相加

$$(\vec{F}_1 + \vec{f} + \vec{F}_2 + \vec{f}')\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}_1 + \mathrm{d}\vec{p}_2$$

$\vec{f},\vec{f}'$ 是一对作用力和反作用力

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)\mathrm{d}t = \mathrm{d}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$$

扩展到有i个质点的系统

$$(\sum_i \vec{F}_i)\mathrm{d}t = \mathrm{d}(\sum_i \vec{p}_i)$$

对从t_1到t_2时间内积分

$$\sum \int_{t_1}^{t_2} F_i \mathrm{d}t = \sum_i p_{i2} - \sum_i p_{i1} = \sum_i m_i v_{i2} - \sum_i m_i v_{i1}$$

质点系总动量的增量，等于作用在质点上所有外力在同一时间内的冲量的矢量和。

三、动量守恒定律

根据质心运动定律：$\sum \vec{F}_i = m\vec{a}_C$

若 $\sum \vec{F}_i = 0$ 则 $\vec{a}_C = 0$

即 $$\vec{v}_C = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m} = \text{常矢量}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = m\vec{v}_C = \text{常矢量}$$

如果系统所受的外力之和为零，则系统的总动量保持不变，这个结论叫做动量守恒定律（**law of conservation of momentum**）。

讨论

(1)动量守恒是指系统动量总和不变，但系统内各个质点的动量可以变化，通过内力进行传递和交换。

(2)当外力作用远小于内力作用时，可近似认为系统的总动量守恒。（如：碰撞、打击过程等）

(3) 分量式

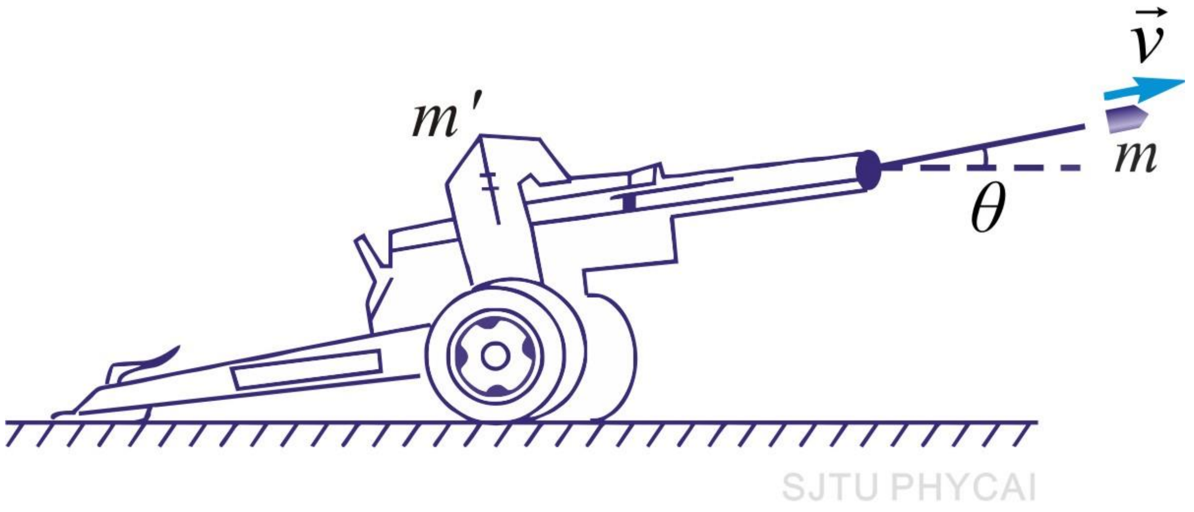
$$p_x = \sum m_i v_{ix} = \text{常量} \quad (\text{当}\sum F_{ix} = 0\text{时})$$

$$p_y = \sum m_i v_{iy} = \text{常量} \quad (\text{当}\sum F_{iy} = 0\text{时})$$

$$p_z = \sum m_i v_{iz} = \text{常量} \quad (\text{当}\sum F_{iz} = 0\text{时})$$

(4) 定律不仅适合宏观物体，同样也适合微观领域。

例7-6 如图所示,设炮车以仰角θ发射一炮弹，炮车和炮弹的质量分别为m'和m，炮弹的出口速度为v，求炮车的反冲速度v'。炮车与地面间的摩擦力不计。



例7-7 一个静止物体炸成三块，其中两块质量相等，且以相同速度30 m/s沿相互垂直的方向飞开，第三块的质量恰好等于这两块质量的总和。试求第三块的速度（大小和方向）。

例7-8 质量为m_1 和m_2的两个小孩，在光滑水平冰面上用绳彼此拉对方。开始时静止，相距为l 。问他们将在何处相遇？