功，动能，势能和能量守恒

“能量”是物理学一个极为普遍、极为重要的物理量，有机械能、热能、电磁能、辐射能、化学能、生物能、核能等多种形式，各种形式的能量可以相互转换。能量这一概念的重大价值，在于它转换时的守恒性。

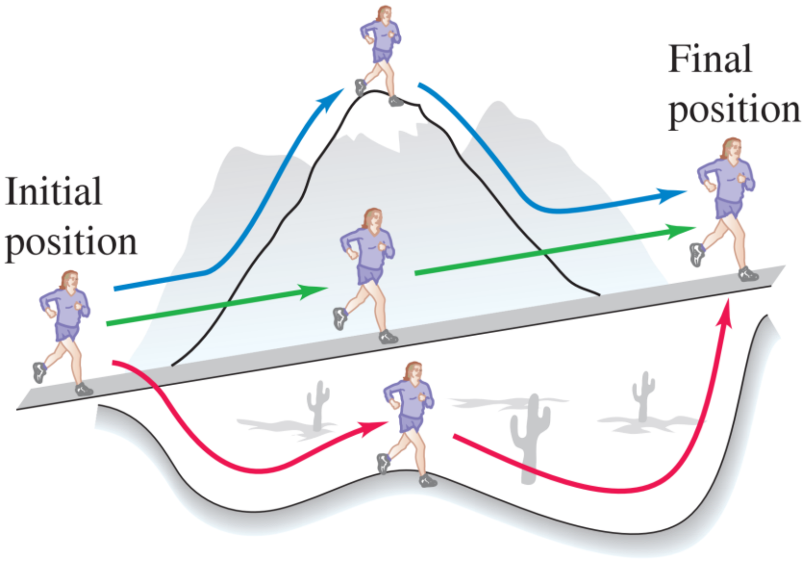
本节课主要内容：

E. 保守力和势能

F. 质点系的动能定理

G. 能量守恒定理

H. 质心系



上节课主要内容：

A. 自然坐标系

B. 功、动能 $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

C. 动能定理（单个质点的功能原理）

D. 势能

上一节课，我们讲到几种常见力的做功，如：重力

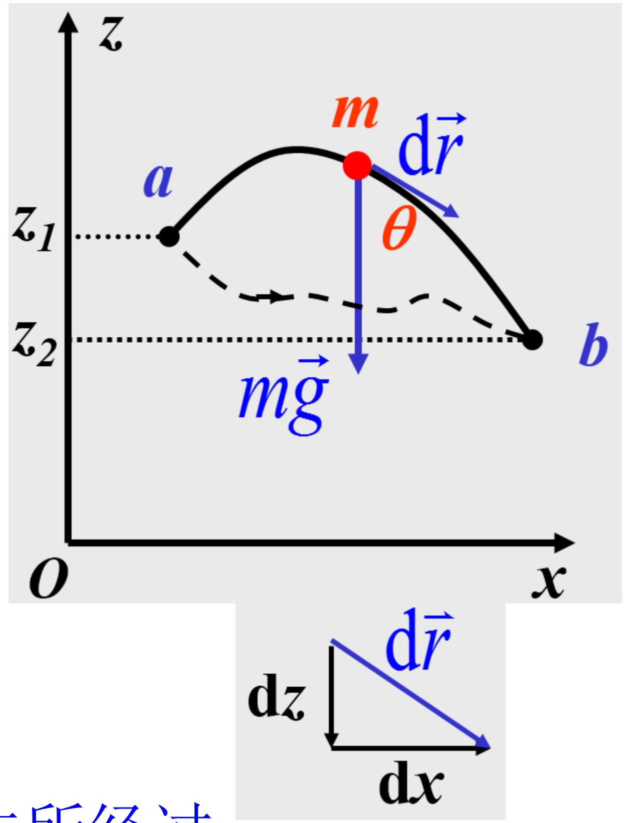
质量为m的质点从a点运动到b点

$$dW = m\vec{g}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$m\vec{g} = -mg\vec{k} \qquad \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}z\vec{k}$$

$$dW = -mg\vec{k}\cdot(\mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}z\vec{k}) = -mg\mathrm{d}z$$

$$\boxed{W = -mg\int_{z_1}^{z_2}\mathrm{d}z = mgz_1 - mgz_2}$$



- 重力作功只与质点的起始和终了位置有关， 而与所经过的路径无关。

上一节课，我们讲到几种常见力的做功，如：万有引力

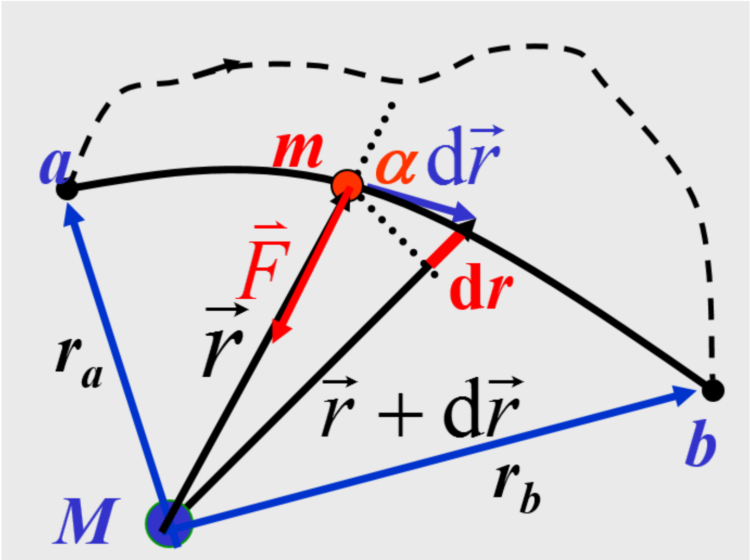
设质量为*M*的质点固定，另一质量为*m*的质点在*M*的引力场中从*a*点运动到*b*点。

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

$$W = \int_{r_a}^{r_b} -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

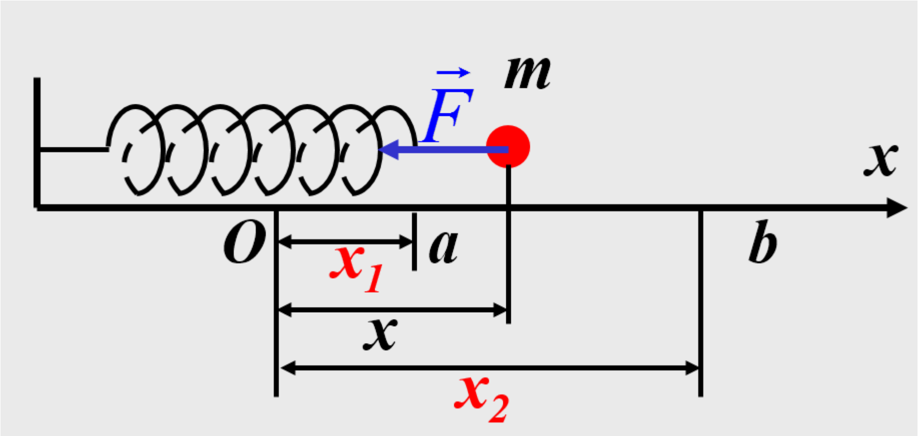
$$\vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = r\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos\alpha = r\mathrm{d}r$$

$$\boxed{W = -GMm\int_{r_a}^{r_b}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -GMm\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)}$$



- 万有引力的功仅由物体的始末位置决定，而与路径无关。

上一节课，我们讲到几种常见力的做功，如：弹性力



$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{x_1}^{x_2} -kx\vec{i} \cdot dx\vec{i} = -\int_{x_1}^{x_2} kx dx$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2}$$

- 弹性力作功只与质点的起始和终了位置有关，而与质点运动的路径无关。

E. 保守力 (conservative force)

词根：conservation，守恒

E1、保守力定义

- 做功与路径无关只与起始和结束位置有关的力叫**保守力**。
- 物体所受的保守力只与物体在力场中的位置有关。

重力做功：$W_{ab}=mg(z_a-z_b)=\boxed{-(E_{pb}-E_{pa})}$ $\quad E_{pa}=mgz_a$

万有引力做功：$W_{ab}=GMm\left(\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_a}\right)=\boxed{-(E_{pb}-E_{pa})}$ $\Rightarrow$ $E_{pa}=-\frac{GMm}{r_a}$

弹力做功：$W_{ab}=\frac{1}{2}kx_a^{\ 2}-\frac{1}{2}kx_b^{\ 2}=\boxed{-(E_{pb}-E_{pa})}$ $\quad E_{pa}=kx_a^{\ 2}/2$

保守力做的功，等于势能的减少

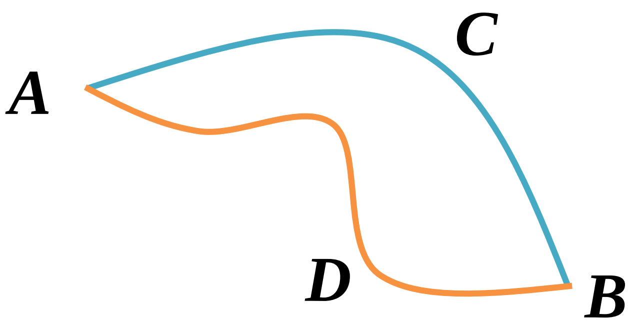
➢ **质点沿任何闭合路径运动一周，保守力对它的作功为零。**

证明：

$$\int_{ACB}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{ADB}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\oint_{l}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{ACB}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{BDA}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$W=\oint_{l}\vec{F}\cdot d\vec{r}=0$$



E2、非保守力

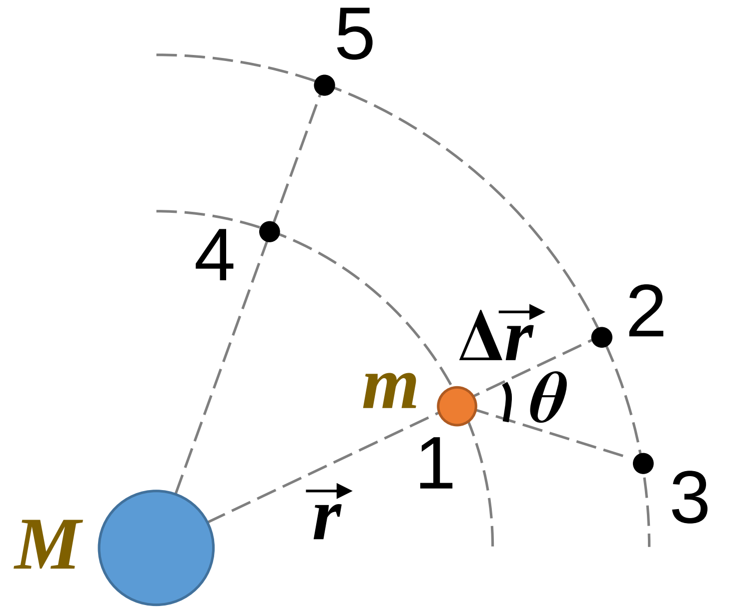
不具备保守力性质的力

非保守力： 作功不仅与始末位置有关，还与路径有关的。比如摩擦力。

而(一对)摩擦力作功始终是负的。非保守力通常又称为耗散力。

思考：摩擦过程中，能量耗散到哪里去了？

保守力与路径无关的证明：以万有引力为例



将m沿着径向连线方向从 1 移至 2，当移动距离很小时，引力做的功近似为

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = -G\frac{mM}{r_1^2}\Delta r$$

再考虑m从 1 移动到 3，在这条路径上力与位移夹角为$(\pi-\theta)$，而位移大小为$\Delta r/\cos\theta$，所以引力做功近似为

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \frac{GmM}{r_1^2}\frac{\Delta r}{\cos\theta}(-\cos\theta) = -\frac{GmM}{r_1^2}\Delta r$$

而在从3到2的路径上，引力总是与位移垂直，所以不做功。因此我们证明了沿路径1→3→2引力做功与相应的径向路径1→2上引力做功相同。

万有引力是一个保守力。

定义 $V = -G\dfrac{mM}{r}$ 为**引力势能**，当 $r\to\infty$ 时，引力势能趋于零。

E3、势能：与物体位置相关的能量

在保守力做功的情况下，就可以引进与相对位置有关的能量—— **势能** （potential energy）的概念。位置是相对的，所以势能也是相对的，零点可任取，常用的势能及零点:

保守力的功是势能**变化**的量度:

物体在保守力场中a，b两点的势能E_{pa}， E_{pb}之差等于质点由a点移动到b点过程中保守力做的功A_{ab}。

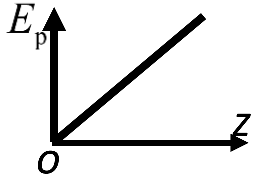
$$E_{pa} - E_{pb} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = W_{ab}$$

$$\boxed{W_{ab} = -(E_{pb} - E_{pa}) = -\Delta E_p}$$

保守力的功等于系统势能的减少。

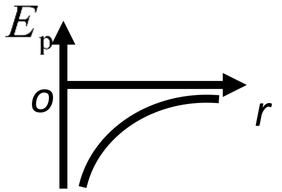
常见的势能及其零点选取

重力势能 $E_p = mgz$ $z=0$ $E_p=0$



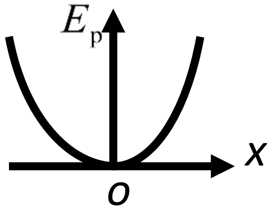
重力势能曲线

引力势能 $E_p = -\frac{GMm}{r}$ $r=\infty$ $E_p=0$



引力势能曲线

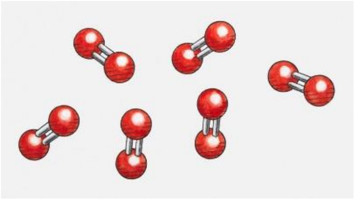
弹性势能 $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ $x=0$ $E_p=0$



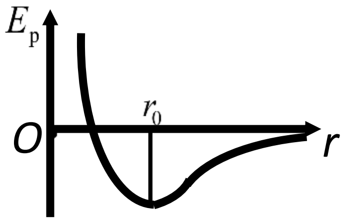
弹性势能曲线

微观物质：

兰纳–琼斯势（英語：Lennard-Jones potential）



$r_b=\infty$ $E_{pb}=0$ $V(r) = 4\epsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right]$



L-J势能曲线

E4、由势能求保守力

保守力对路径积分 → 势能，　　对势能沿路径求导 → 保守力?

保守力沿x方向的分量，等于与此保守力相应的势能函数沿x方向的方向导数的负值：

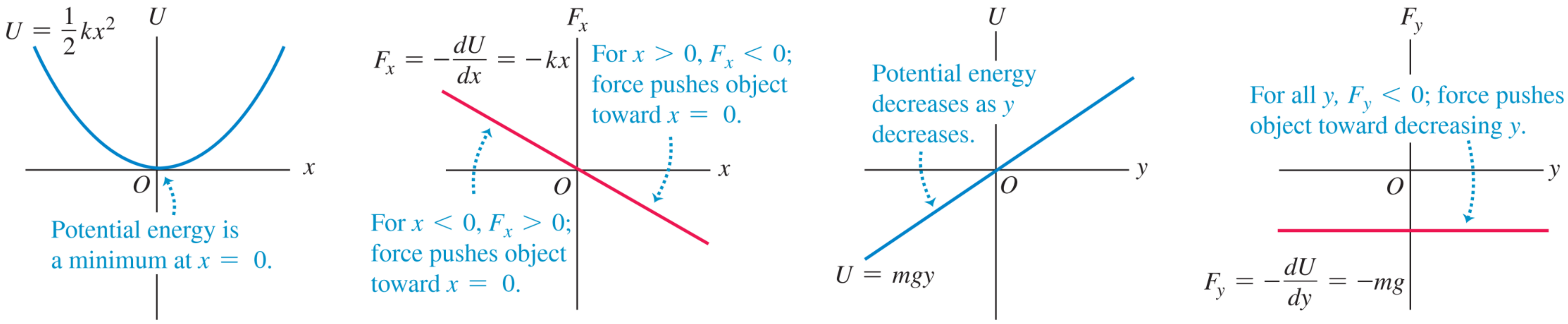
Force from potential energy:
In **one-dimensional motion,** the value of a conservative force at point x ...

$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

... is the negative of the derivative at x of the associated potential-energy function.

(a) Elastic potential energy and force as functions of x

(b) Gravitational potential energy and force as functions of y



三维直角坐标系中：

Force from potential energy: In **three-dimensional motion,** the value at a given point of each component of a conservative force ...

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

... is the negative of the partial derivative at that point of the associated potential-energy function.

引入Nabla算符 ∇ ：保守力等于相应势能函数的负梯度

Force from potential energy: The vector value of a conservative force at a given point ...

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right) = -\vec{\nabla} U$$

... is the negative of the gradient at that point of the associated potential-energy function.

常见的势能曲线及其对应的保守力曲线

势能曲线

力曲线

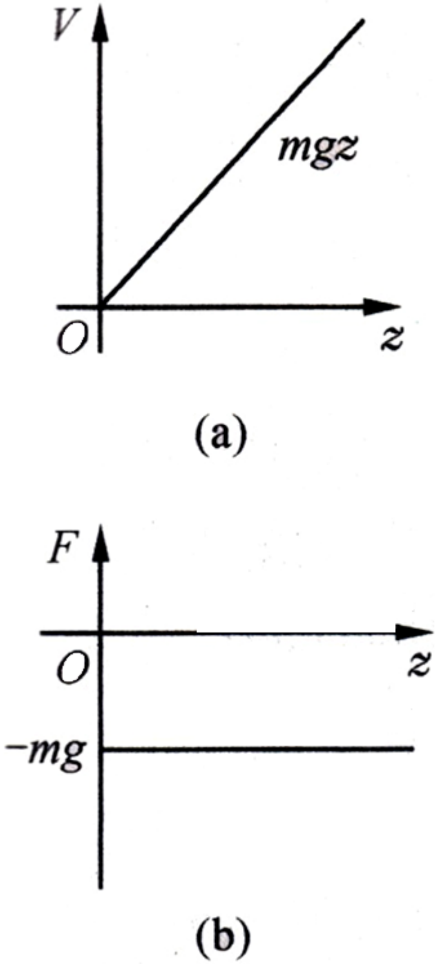


图 5.3　重力势能

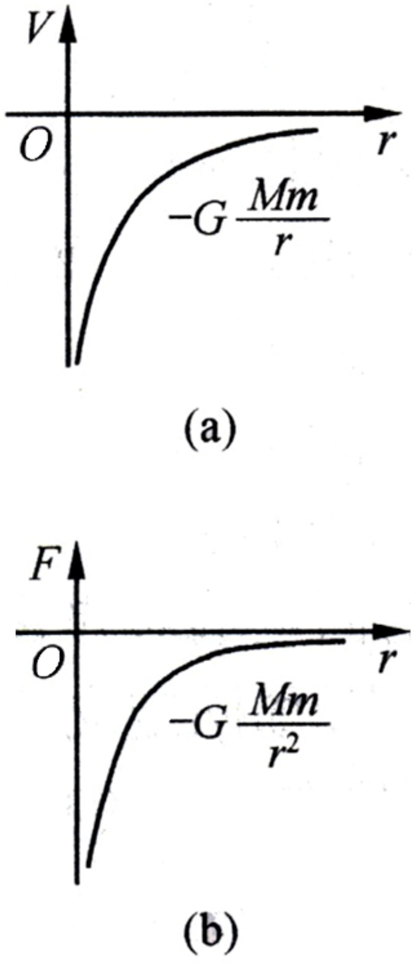


图 5.4　万有引力势能

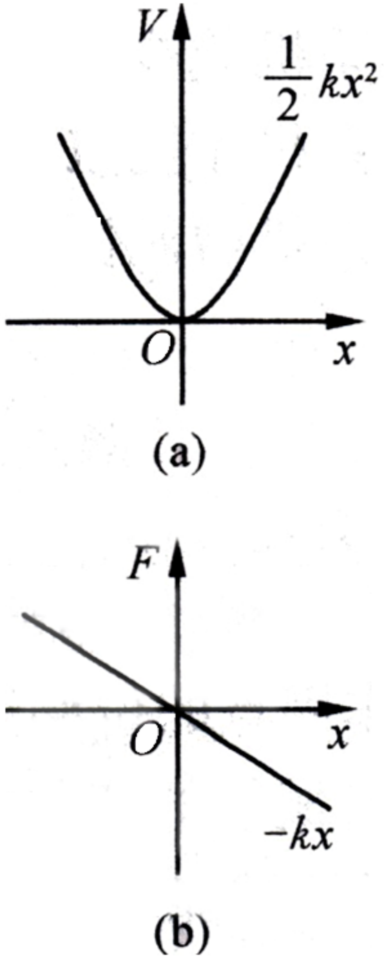


图 5.5　弹性力势能

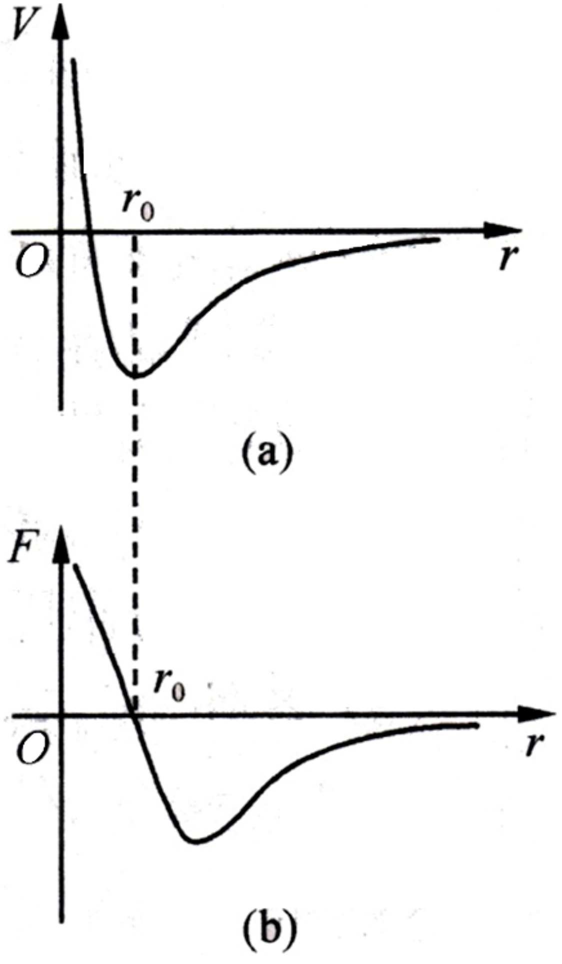
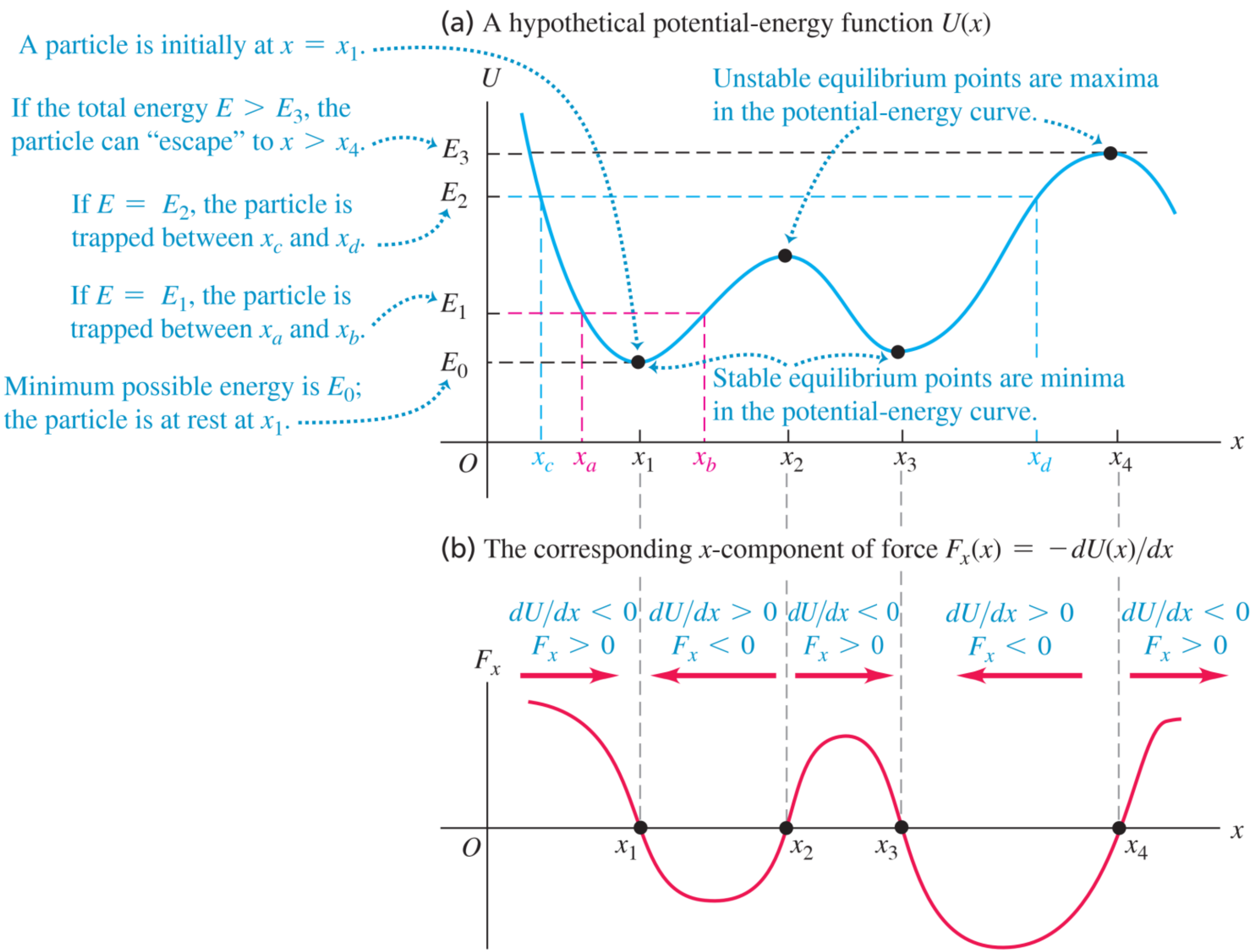


图 5.6　双原子分子势能

E5、稳定平衡和不稳平衡

Figure 7.24 The maxima and minima of a potential-energy function $U(x)$ correspond to points where $F_x = 0$.



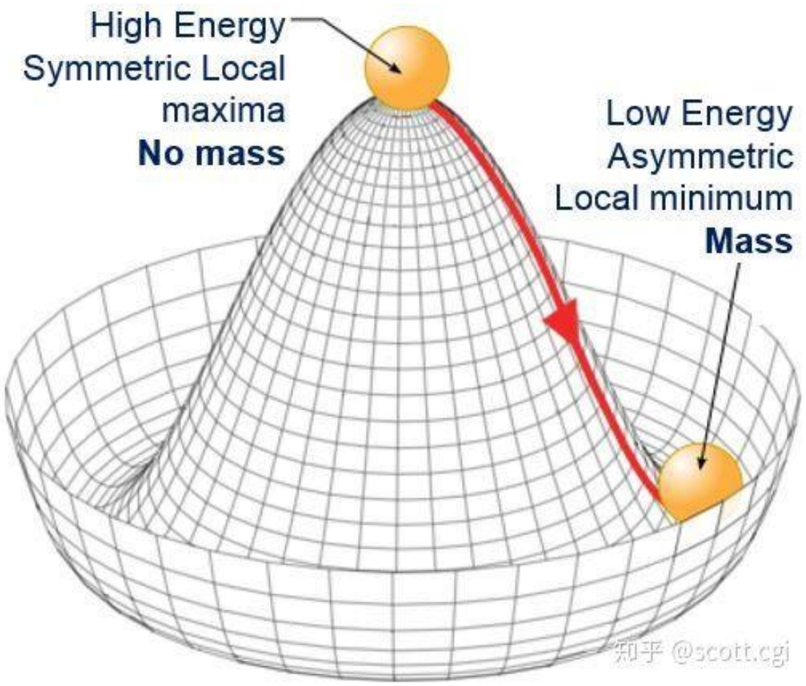
势能曲线的局部最大值为不稳定平衡

微小的扰动都将使得体系失去平衡

势能曲线的局部最小值为稳定平衡

微小的扰动（<势垒）不会让体系脱离平衡

前沿物理：上帝粒子（希格斯玻色子）与自发对称破缺



如右图所示，假设在墨西哥帽（sombrero）的帽顶有一个圆球。这个圆球是处于旋转对称性状态，对于绕着帽子中心轴的旋转，圆球的位置不变。这圆球也处于局部最大引力势的状态，极不稳定，稍加摄动，就可以促使圆球滚落至帽子谷底的任意位置，因此降低至最小引力势位置，使得旋转对称性被打破。尽管这圆球在帽子谷底的所有可能位置因旋转对称性而相互关联，圆球实际实现的帽子谷底位置不具有旋转对称性──对于绕着帽子中心轴的旋转，圆球的位置会改变。[17]:203在帽子谷底有无穷多个不同、简并的最低能量态，都具有同样的最低能量。对于绕着帽子中心轴的旋转，会将圆球所处的最低能量态变换至另一个不同的最低能量态，除非旋转角度为360°的整数倍数，所以，圆球的最低能量态对于旋转变换不具有不变性，即不具有旋转对称性。总结，这物理系统的拉格朗日量具有旋转对称性，但最低能量态不具有旋转对称性，因此出现自发对称性破缺现象。[17]:203

假定希格斯势的形式为

$$V(\phi^*\phi) = -\mu^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2;$$

其中，ϕ是复值希格斯场，μ、λ都是正值常数。

对于这自旋为零、质量为零、势能为$V(\phi^*\phi)$的标量场ϕ，克莱因-戈尔登拉格朗日量$\mathcal{L}$为[18]:16-17

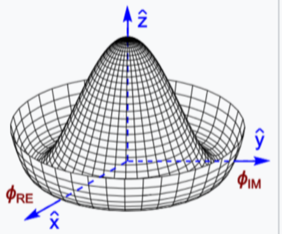
$$\mathcal{L} = (\partial_\alpha\phi)^*(\partial^\alpha\phi) + \mu^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2。$$

如右边的墨西哥帽绘图所示，这势能的猜想形状好似一顶墨西哥帽。希格斯势与拉格朗日量在$\phi_{\rm RE}$、$\phi_{\rm IM}$空间具有旋转对称性。位于z-坐标轴的帽顶为希格斯势的局域最大值，其复值希格斯场为零（$\phi=0$），但这不是最低能量态；在帽子的谷底有无穷多个简并的最低能量态。从无穷多个简并的最低能量态中，物理系统只能实现出一个最低能量态，标记这最低能量态为ϕ_{vac}。这物理系统的拉格朗日量对于全域相位变换$\phi \to \phi' = e^{i\theta}\phi$具有不变性，即在$\phi_{\rm RE}$、$\phi_{\rm IM}$空间具有旋转对称性，而最低能量态$\phi_{vac}$对于全域相位变换不具有不变性：

$$\phi_{vac} \to \phi'_{vac} = e^{i\theta}\phi_{vac},$$

通常，ϕ_{vac}不等于ϕ'_{vac}，除非角弧θ是2π的整数倍数。所以，这物理系统对于全域相位变换的对称性被自发打破。这物理系统对于更严格的局域相位变换的对称性也应该会被自发打破。

墨西哥帽势能函数的电脑绘图，对于绕着帽子中心轴的旋转，帽顶具有旋转对称性，帽子谷底的任意位置不具有旋转对称性，在帽子谷底的任意位置会出现对称性破缺。



设定直角坐标系的x-坐标与y-坐标分别为复值希格斯场ϕ的实部$\phi_{\rm RE}$与虚部$\phi_{\rm IM}$，z-坐标为希格斯势，则参数为希格斯场ϕ的希格斯势，其猜想形状好似一顶墨西哥帽。

关于势能的说明

- 势能是相互作用有保守力的系统的属性。
- 势能的大小只有相对的意义，相对于势能零点而言。势能零点可以任意选取。

设空间 $\vec{r}_0$ 点为势能零点，则空间任意一点 $\vec{r}$ 的势能为：

$$E_\mathrm{p}(\vec{r})=E_\mathrm{p}(\vec{r})-E_\mathrm{p}(\vec{r}_0)=\int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

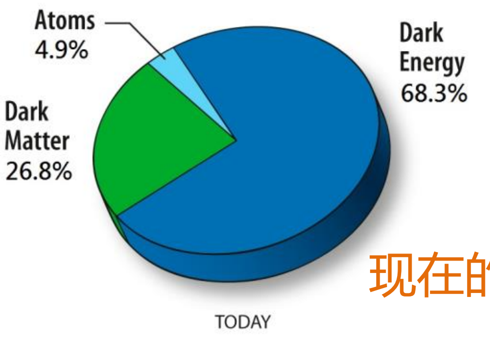
➢ 空间某点的势能E_p在数值上等于质点从该点移动到势能零点时保守力作的功。

- 非惯性系中，通过引入合适的惯性力，也能有惯性势能的概念

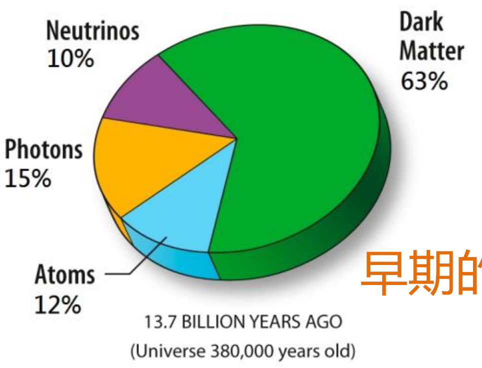
题外话：神秘难解的暗能量

2011年诺贝尔物理学奖——宇宙正在加速膨胀

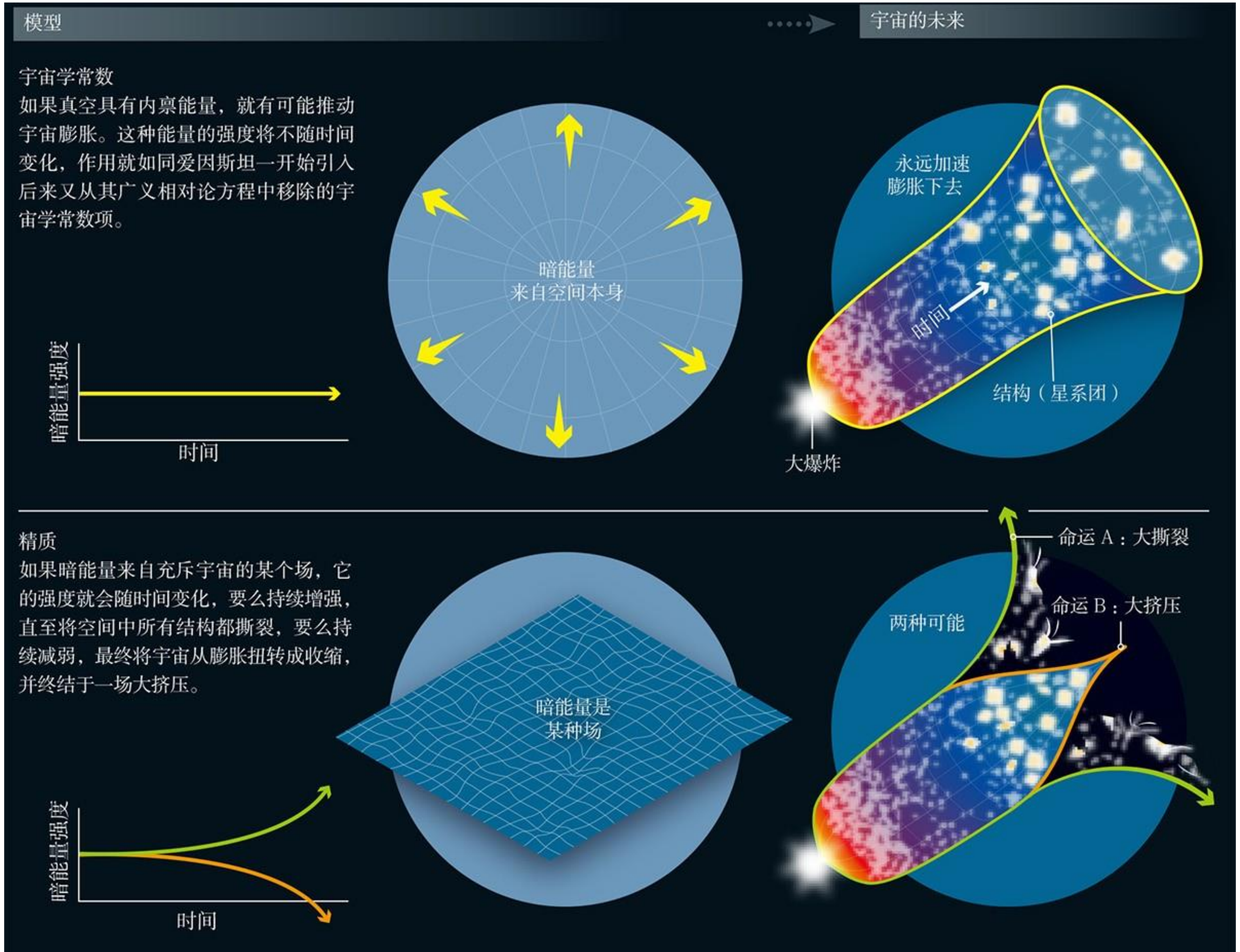
暗能量：除了万有引力之外，一定还有一种未知的相互作用，与空间相关，使得宇宙万物之间加速远离——“万有斥力”、“负引力”



现在的宇宙



早期的宇宙



F. 质点系的动能定理

F1、质点系

由有限个或无限个（N个）质点构成的系统

$$i, j = 1,2,\cdots, N$$

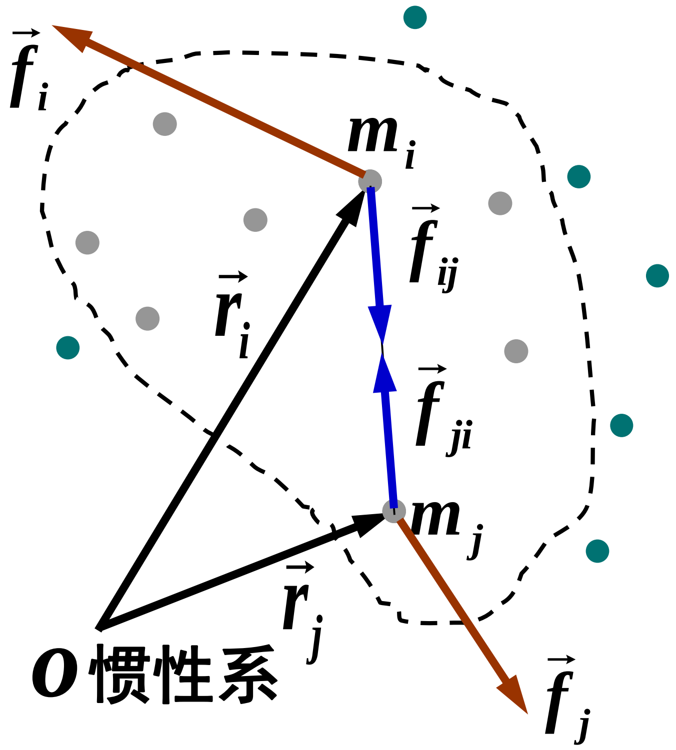
F2、内力和外力

系统以外物体作用于系统内各质点的力为外力

外力：$\vec{f}_i , f_j$

系统内各质点之间的相互作用力称为内力

内力：$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$



在处理实际问题时，可根据需要选择质点系

F3、质点系内力的功

一切内力矢量和=零。但一般情况下，所有内力做功的总和并不为零。例如，两个相互吸引的磁铁。**外力和内力的功都可以改变质点系的动能**

F4、质点系的动能定理：

由质点动能定理： $W = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k$

$$\boxed{W_e + W_I = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_{i2}^2 - \frac{1}{2} m_i v_{i1}^2\right) = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k}$$

系统的外力和内力做功的总和等于系统动能的增量。

一些注意点：

每个质点动能定理 $W_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2 - \frac{1}{2}m_i v_{i0}^2$ 其中 $W_i = W_{ie} + W_{i\mathrm{I}}$ （外力-e，内力-I）

对系统内所有质点求和 $\sum_i W_{ie} + \sum_i W_{i\mathrm{I}} = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 - \sum_i \frac{1}{2}m_i v_{i0}^2$

(1) 总动能 $E_k = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2$

(2) 外力对系统所作的功是指**每一个外力所作功之和**，而**非合外力所作的功。**

合外力为0， 做功不为0

(3) 一对内力的功：

$$\mathrm{d}W = \vec{F}_{ij} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i + \vec{F}_{ji} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_j$$

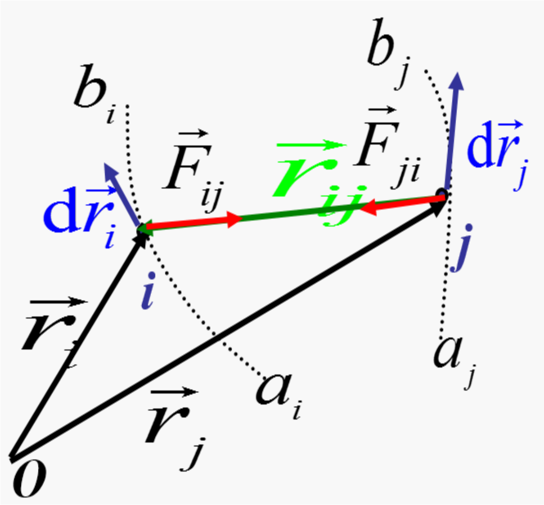
$$= \vec{F}_{ij} \cdot (\mathrm{d}\vec{r}_i - \mathrm{d}\vec{r}_j)$$

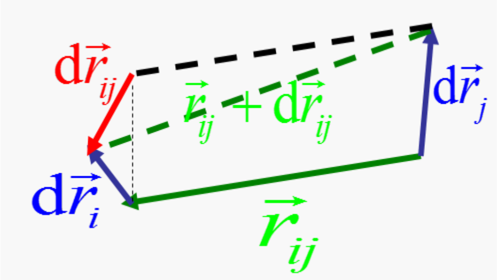
$$= \vec{F}_{ij} \cdot \mathrm{d}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ 相对位矢

$\mathrm{d}\vec{r}_{ij} = \mathrm{d}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ 相对元位移

$$\boxed{\mathrm{d}W = \vec{F}_{ij} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{ij}}$$





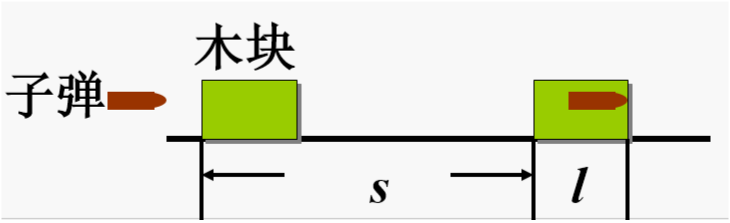
因此，一对内力的功：

1. 系统内一对内力的功一般不为零

2. 一对内力做功之和与所选的参照系无关

3. 一对内力做功之和只与相对位移有关。若无相对位移或相对位移与这一对力垂直，则这一对内力的功为零。

[例] 一颗子弹穿入厚为 l 的木块后停留在木块的前部，同时木块在桌面上向前移动了 s 距离，求这一过程中子弹与木块之间的摩擦力所做的总功。



地面参考系：$W_{f1}=f\cdot s$ 木块 $W_{f2}=-f\cdot(s+l)$ 子弹

木块参考系：$W_{f1}=0$ 木块 $W_{f2}=-f\cdot l$ 子弹

子弹参考系：$W_{f1}=-f\cdot l$ 木块 $W_{f2}=0$ 子弹

$$W_f=W_{f1}+W_{f2}=-f\cdot l$$

G. 能量守恒定律

回顾：　机械能 = 总动能 + 势能

$$E = E_k + E_P$$

G2、质点系的功能原理

内力的总功 W_{I}

保守内力的总功 W_{CI}

非保守内力的总功 W_{NI}

$\mathrm{E_p}$ 质点系势能

$\mathrm{E_k}$ 质点系动能

$$W_{\mathrm{e}} + W_{\mathrm{NI}} + W_{\mathrm{CI}} = E_{\mathrm{k}} - E_{\mathrm{k0}} = \Delta E_{\mathrm{k}}$$

$$W_{\mathrm{CI}} = -(E_{\mathrm{p}} - E_{\mathrm{p0}}) = -\Delta E_{\mathrm{p}}$$

$$\boxed{W_{\mathrm{e}} + W_{\mathrm{NI}} = (E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}}) - (E_{\mathrm{k0}} + E_{\mathrm{p0}})}$$

$$= E - E_0 = \Delta E$$

质点系的功能原理： 质点系在运动过程中，所有外力的功和非保守内力的功的总和等于系统机械能的增量。

G3、机械能守恒定律 （适用于惯性系）

若 $W_e = 0,\ W_{NI} = 0$ $\quad \Delta E = 0 \Rightarrow E_k + E_p = E_{k0} + E_{p0}$ 机械能守恒定律

- 系统中的动能和势能可以转换，各质点间的机械能也可以互换，但保持系统的总机械能不变。

机械能守恒定律：如果系统内只有保守内力做功，非保守内力和一切外力都不做功（或内力元功之和为零），则系统中动能和势能可以转换，各质点间的机械能也可以相互转换，但总机械能不变。

- 在某一惯性系中机械能守恒，但在另一惯性系中机械能不一定守恒。

$\because$ W_{NI} 与参照系无关，而 We 与参照系有关。

问题1：系统内有非保守力做功，系统的机械能是否守恒?

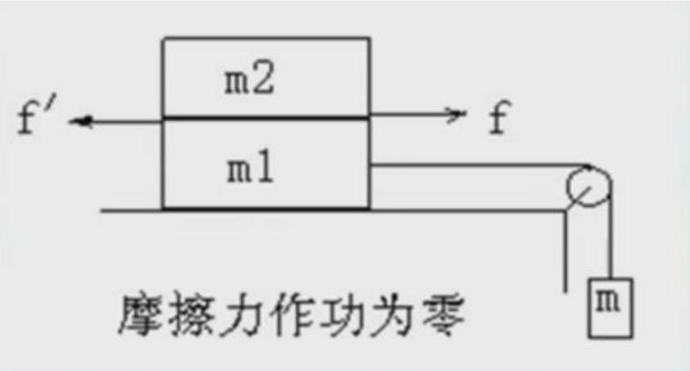
有可能不守恒。比如摩擦力，可以将机械能转变成热能，这时候机械能不守恒。

问题2：系统内有非保守力做功，系统的机械能就一定不守恒吗?

不一定。如图，非保守力摩擦力做功，但 f' 和 f 这一对内力摩擦力的做功之和为零。

元功之和为零，所以机械能依然守恒。

原因：没有相对位移！



G4、能量守恒定律

定义：孤立系统

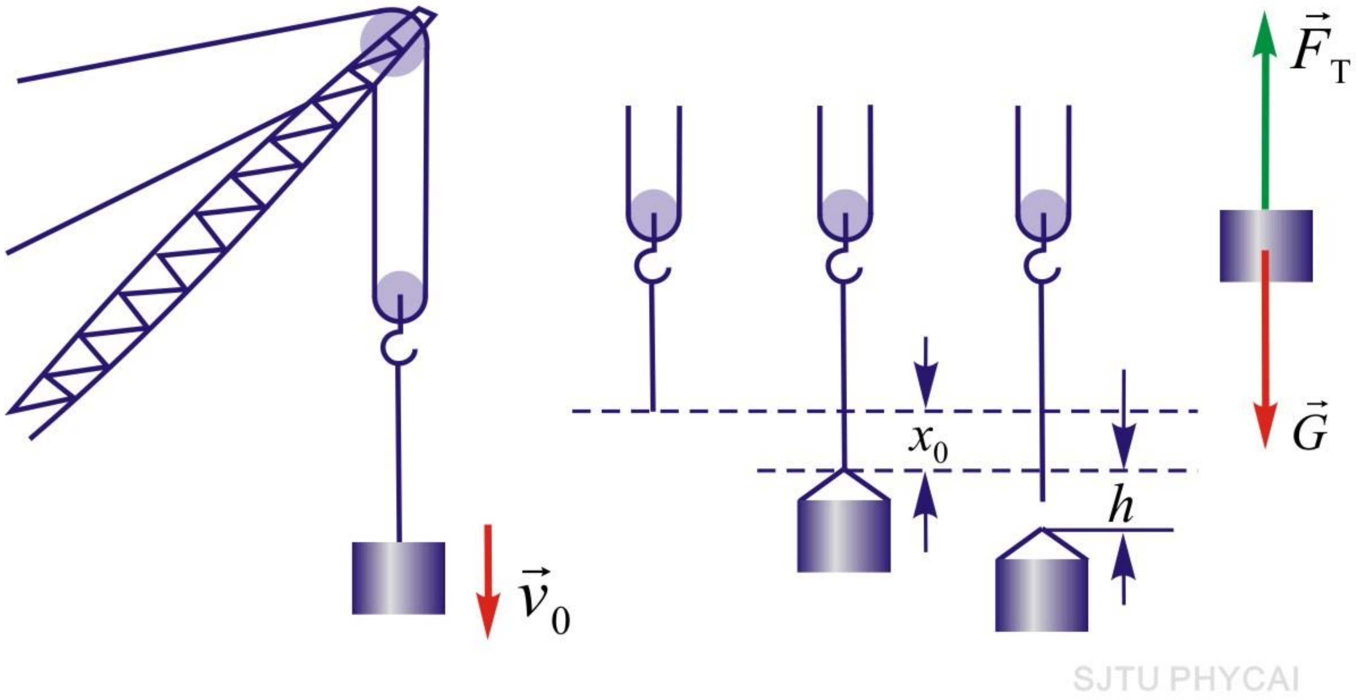
一个不受外界作用的系统叫孤立系统。对于孤立系统，外界的功一定是零。

能量守恒定律：一个孤立体系，在变化过程中，该系统的所有能量的总和是不变的。能量只能从一种形式转化为另一种形式，或从一个物体传给另一个物体。

若 $W_e = 0$， 则 $\boxed{W_{NI} = \Delta E}$ 能量转换和守恒定律

外力 非保守内力做功=机械能变化

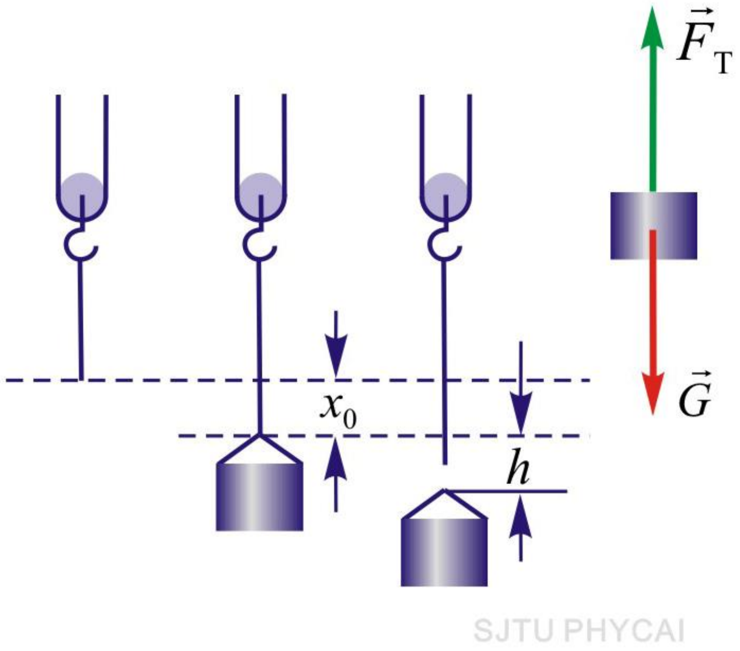
例2-17 起重机用钢丝绳吊运一质量为m 的物体，以速度v_0 做匀速下降，如图所示。当起重机突然刹车时，物体因惯性进行下降，问使钢丝绳再有多少微小的伸长？(设钢丝绳的劲度系数为k，钢丝绳的重力忽略不计。)这样突然刹车后，钢丝绳所受的最大拉力将有多大？



解： 研究物体、地球和钢丝绳所组成的系统。

系统的机械能守恒。

首先讨论起重机突然停止的瞬时位置处的机械能，



设这时钢丝绳的伸长量为x_0，则有

$$E_{k1} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$E_{p1}^{弹} = \frac{1}{2}kx_0^2$$

设物体因惯性继续下降的微小距离为h，并以这最低位置作为重力势能的零点，则有

$$E_{p1}^{重} = 0$$

再讨论物体下降到最低位置时的机械能：

$$E_{\mathrm{k}2}=0 \qquad E_{\mathrm{p}2}^{弹}=\frac{1}{2}k(x_0+h)^2 \qquad E_{\mathrm{p}2}^{重}=0$$

机械能守恒：

$$\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}kx_0^2+mgh=\frac{1}{2}k(x_0+h)^2$$

物体做匀速运动时，钢丝绳的伸长量x_0满足 $mg=kx_0$

$$\Rightarrow \quad h=\sqrt{\frac{m}{k}}v_0$$

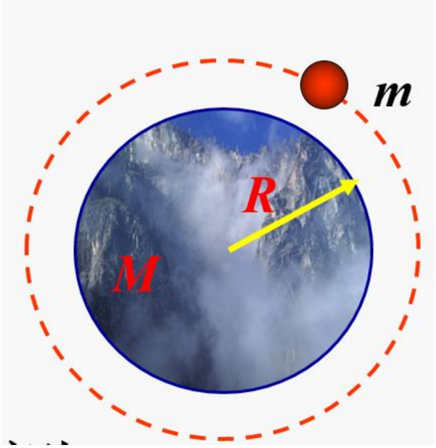
最低位置时相应的伸长量$x=x_0+h$是钢丝绳的最大伸长量，所以钢丝绳所受的最大拉力

$$F'_{T,m}=F_{T,m}=k(x_0+h)$$

$$=k\left(\frac{mg}{k}+\sqrt{\frac{m}{k}}v_0\right)=mg+\sqrt{km}v_0$$

例：计算第一宇宙速度

已知：地球半径为*R*，质量为*M*，卫星质量为*m*。要使卫星在距地面 *h* 高度绕地球作匀速圆周运动，求其发射速度。



解： 设发射速度为v_1，绕地球的运动速度为*v*。

机械能守恒： $$\frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R+h}$$

万有引力提供向心力： $$G\frac{Mm}{(R+h)^2} = m\frac{v^2}{R+h}$$

$\because \quad h \ll R$ 第一宇宙速度

得： $$v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R} - \frac{GM}{R+h}} \Rightarrow v_1 = \sqrt{gR\left(2 - \frac{R}{R+h}\right)}$$

$$\boxed{v_1 \approx \sqrt{gR} = 7.9 \times 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}$$

例：计算第二宇宙速度

宇宙飞船脱离地球引力而必须具有的发射速度。

(1) 脱离地球引力时，飞船的动能必须大于或等于零。

(2) 脱离地球引力处（无穷远处），飞船的引力势能为零。

由机械能守恒：
$$\frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{Mm}{R} = E_{\mathrm{k}\infty} + E_{\mathrm{p}\infty} = 0$$

得：

$$\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2}v_1 = 11.2\times10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

H、质心系 – N个到连续体系

H1、质心系

质心：质心是与质量分布有关的一个代表点，它的位置在平均意义上代表着质量分布的中心。

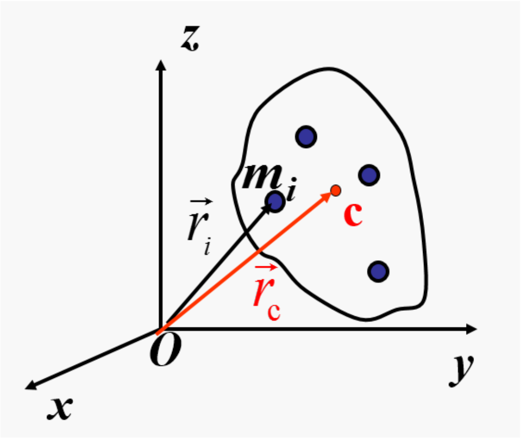
$$\vec{r_c} = \frac{1}{M}\sum m_i\vec{r_i}$$

$$\vec{v_c} = \frac{1}{M}\sum m_i\vec{v_i}$$

$$\vec{v}_i' = \vec{v_i} - \vec{v_c}$$

质量连续分布的物体：

$$\boxed{\vec{r}_c = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}}$$



H2、质心运动定理

由质心位矢公式：

$$\vec{r}_{\mathrm{c}}=\frac{\sum\limits_i m_i\vec{r}_i}{\sum\limits_i m_i}$$

$$\vec{v}_{\mathrm{c}}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t}=\sum_i m_i\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}\Big/\mathrm{M}=\sum_i m_i\vec{v}_i/M \Rightarrow \boxed{\mathrm{M}\vec{v}_{\mathrm{c}}=\sum_i m_i\,\vec{v}_i}$$

质心系的动量，如同所有质量集中于质心，速度为质心运动速度

质心坐标系：

$$\vec{r}_{\mathrm{c}}\equiv 0\rightarrow\vec{v}_{\mathrm{c}}=0\rightarrow\sum_i m_i\vec{v}_i'=0$$

零动量系

由质点系动量定理：

$$\int_{t_0}^{t}\sum_i \vec{F}_i \mathrm{d}t = \sum_i m_i\vec{v}_i - \sum_i m_i\vec{v}_{i0} = m\vec{v}_{\mathrm{c}} - m\vec{v}_{\mathrm{c}0}$$

微分形式：

$$\sum_{i=1} \vec{F}_i \mathrm{d}t = m\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{c}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\sum_i \vec{F}_i = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}_{\mathrm{c}}}$$

质心运动定理：质心的运动等同于一个质点的运动，这个质点具有质点系的总质量，它受到的外力为质点系所受的所有外力的矢量和。

质心系可能是惯性或者非惯性系，在非惯性系考虑作用在质心上惯性力后，动量守恒（零动量），动能定理和角动量定理均成立。

H3、柯尼希定理和质心系中的动能定理

质点系的总动能等于质心的动能，加上各质点相对于质心平动坐标系运动所具有的动能。

（1）科尼希定理（质心系总动能的简单表达形式）

$$E_\mathrm{k}=\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2=\frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\vec{v}_c+\vec{v}_i'\right)^2=\frac{1}{2}Mv_\mathrm{c}^2+\underbrace{\sum_i m_i\vec{v}_i'\cdot\vec{v}_\mathrm{c}}_{=0}+\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2=\frac{1}{2}Mv_\mathrm{c}^2+E_\mathrm{k}'$$

=0 质心坐标系定义可得

*（2）质心系中的动能定理

$$\mathrm{d}E_\mathrm{k}=\sum_i\vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r}_i+\sum_{i,j}\vec{f}_{ij}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_i$$

$$\mathrm{d}\left[\frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\vec{v}_\mathrm{c}+\vec{v}_i'\right)^2\right]=\sum_i\vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\left(\vec{r}_\mathrm{c}+\vec{r}_i'\right)+\sum_{i,j}\vec{f}_{ij}\cdot\mathrm{d}\left(\vec{r}_\mathrm{c}+\vec{r}_i'\right)$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}Mv_\mathrm{c}^2\right)+\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2\right)+\underbrace{\mathrm{d}\left(\sum_i m_i\vec{v}_i'\cdot\vec{v}_\mathrm{c}\right)}_{=0}$$

$$=\sum_i\vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r}_\mathrm{c}+\sum_i\vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r}_i'+\underbrace{\sum_{i,j}\vec{f}_{ij}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_\mathrm{c}}_{=0}+\sum_{i,j}\vec{f}_{ij}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_i'$$

$$\boxed{\therefore\ \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2\right)=\sum_i\vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r}_i'+\sum_{i,j}\vec{f}_{ij}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_i'=\mathrm{d}E_\mathrm{k}'}$$

和惯性系中动能定理的形式完全相同（质心系可以为非惯性系）。

H4、求质心的积分运算

分量式： $x_c = \dfrac{\int x\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}$ $y_c = \dfrac{\int y\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}$ $z_c = \dfrac{\int z\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}$

质量线分布： $\mathrm{d}m = \rho_l \mathrm{d}l$ 线积分

质量面分布： $\mathrm{d}m = \rho_s \mathrm{d}s$ 面积分

质量体分布： $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V$ 体积分

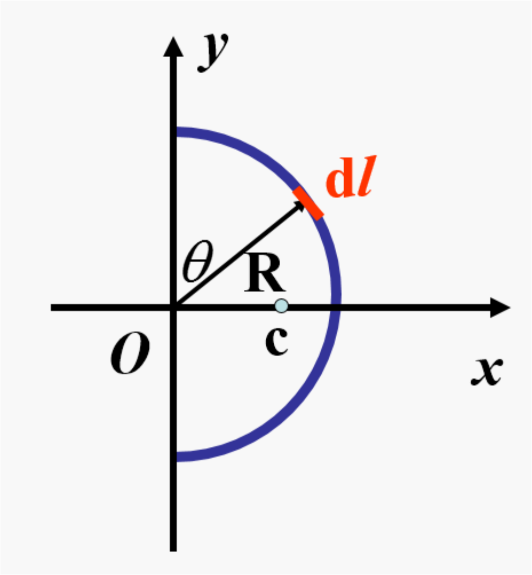
例：求半圆环的质心

解：$\mathrm{d}m = \rho_l \mathrm{d}l = \rho_l R \mathrm{d}\theta$

$$x_c = \int x \mathrm{d}m \Big/ m$$

$$= \int x \rho_l R \mathrm{d}\theta \Big/ \pi R \rho_l$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi R \sin\theta \mathrm{d}\theta = \frac{2R}{\pi}$$



➢ 质心不一定位于物体内部。

进 阶

守恒律，守恒量及其变化

时空的性质		守恒量		守恒量在外力作用下的变化
空间平移不变性	→	动量守恒	→	$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$
时间平移不变性	→	能量守恒	→	$\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta A = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$
空间旋转不变性	→	角动量守恒	→	$\vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

前提：惯性系，非相对论性

哪一个更基本？

在狭义相对论中，动量和能量结合在一起成为动量-能量四维矢量，动量守恒定律也与能量守恒定律一起结合为四维动量守恒定律。

运动积分（Constant of Motion）

- $ma=F(t,r,v)$是二阶常微分方程，需要2个初始条件: $r(t_0)$和$r'(t_0)$
- 一般而言，q个自由度的力学系统需要2q个初始条件来确定其解。
- 如果决定力学系统运动的常微分方程组可以通过积分得到若干在运动轨道上不变的量，则称其为运动积分，如能量、动量、角动量等。独立的运动积分最多有2q-1个。
- 运动积分的存在总是与系统的对称性相联系(Noether定理).
- 通过运动积分确定轨道可以大大简化问题，但绝大多数情况下都只能得到少数运动积分，如能量。
- 某些运动积分具有可加性，如能量、动量、角动量.

关于对称

- ❑ Space translation symmetry – 空间平移（无特殊点），物理定律不变 → 动量
- ❑ Space rotational symmetry – 空间旋转对称（无特殊方向），物理定律不变 → 角动量
- ❑ Time translation symmetry – 时间平移（无特殊时间点），物理定律不变 → 能量

问题：你还能想到哪些对称对应哪些不变量？

Homework：

1. 你在五楼的窗口向外扔石块。一次水平扔出,一次斜向上扔出,一次斜向下扔出。如果三个块质量一样,在下落到地面的过程中,重力对哪一个石块做的功最多?

2. 向上扔一石块,其机械能总是由于空气阻力不断减小，试根据这一事实说明石块上升到最高点所用的时间总比它回落到抛出点所用的时间要短些。

3. 质量为72kg的人跳蹦极。弹性蹦极带原长20m,劲度系数为60N/m。忽略空气阻力。(1)此人自跳台跳出后,落下多高时速度最大?此最大速度是多少? (2)已知跳台高于下面的水面60m。此人跳下后会不会触到水面?

4. A 25.0 kg child plays on a swing having support ropes that are 2.20 m long. Her brother pulls her back until the ropes are 42.0° from the vertical and releases her from rest. (a) What is her potential energy just as she is released, compared with the potential energy at the bottom of the swing’s motion? (b) How fast will she be moving at the bottom? (c) How much work does the tension in the ropes do as she swings from the initial position to the bottom of the motion?

Homework：

5. 一质量为m的人造卫星沿着一圆形轨道运动，离开地面的高度等于地球半径的2倍（即2R）。用m，R，引力恒量G，地球质量M表示出：
（1）卫星的动能；
（2）卫星在地球引力场中的引力势能。

6. 发射地球同步卫星要利用霍曼轨道。设发射一颗质量为500 kg的地球同步卫星。先把它发射到高度为1400km的停泊轨道上，然后利用火箭推力使它沿此轨道的切线进入霍曼轨道。霍曼轨道远地点即同步高度36000 km，在此高度上利用火箭推力使之进入同步轨道。
（1）先后两次火箭推力给予卫星的能量各是多少?
（2）先后两次推力使卫星的速率增加多少?