普通物理I PHYS1181 第5讲

功，动能，势能和能量守恒

“能量”是物理学一个极为普遍、极为重要的物理量，有机械能、热能、电磁能、辐射能、化学能、生物能、核能等多种形式，各种形式的能量可以相互转换。能量这一概念的重大价值，在于它转换时的守恒性。

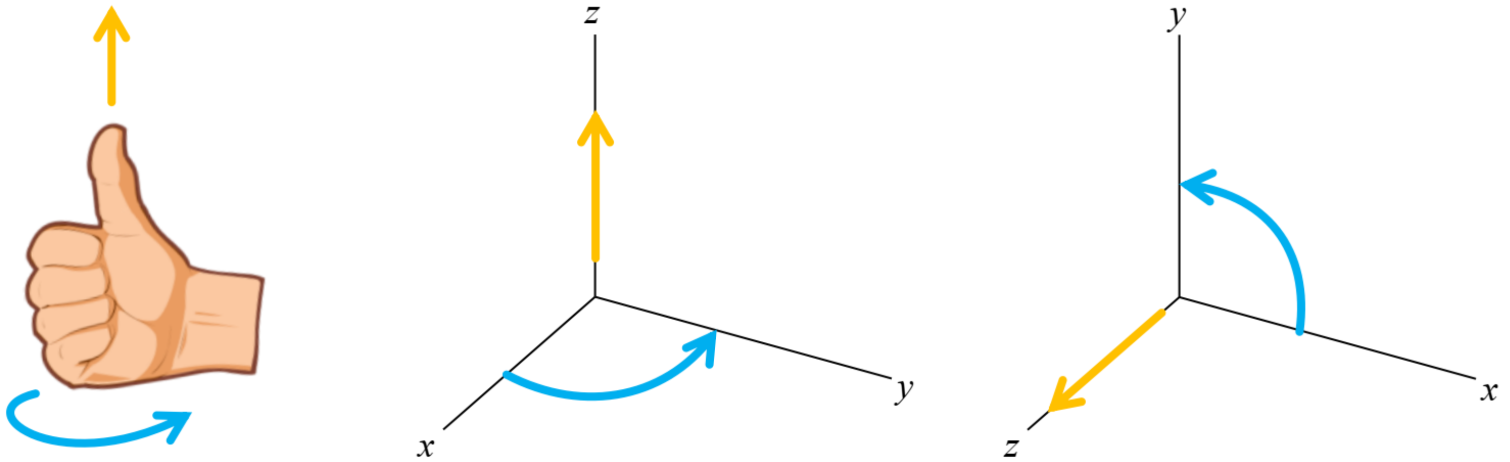


图 1-12 三维笛卡尔坐标系的右手系表示。伸出右手，竖起大拇指，做出一个“点赞”的手势，其余四指的螺旋方向即为从 x 轴转动到 y 轴的旋转方向（蓝色箭头标识），大拇指所指即为 z 轴方向（黄色箭头标识）。这一方法同样适用于矢量叉乘的右手法则。

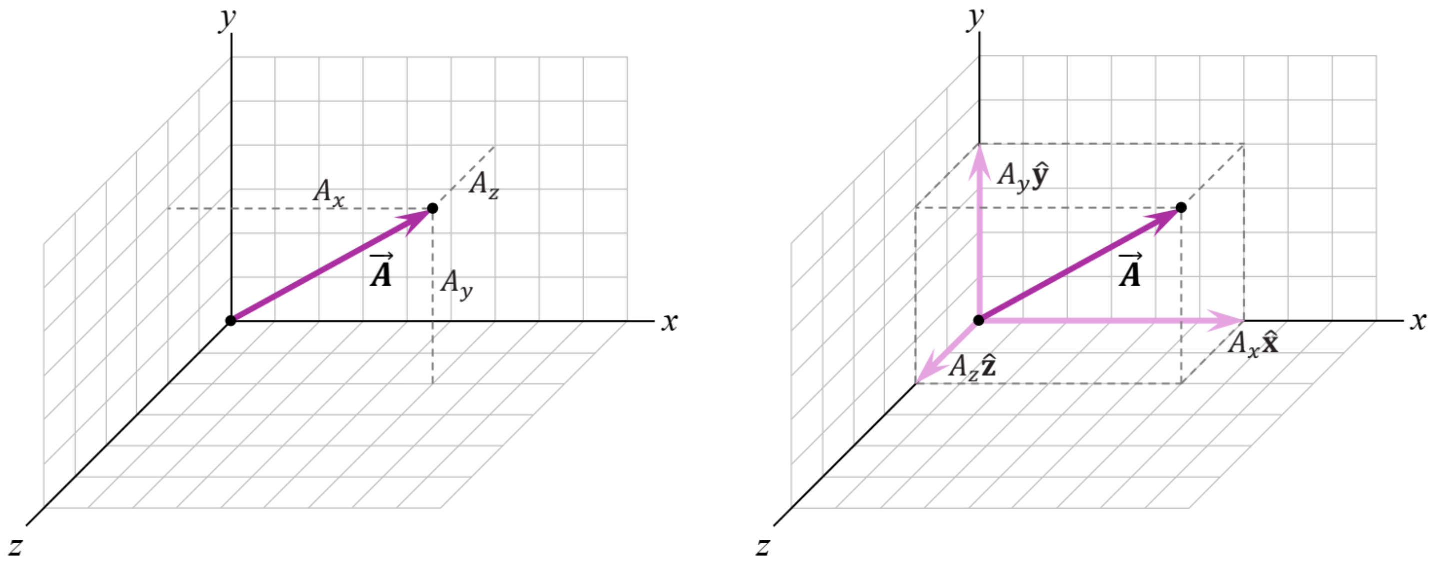


图 1-13 矢量位于三维空间笛卡尔坐标系中，可以表示为在三个坐标轴上的投影矢量的和。

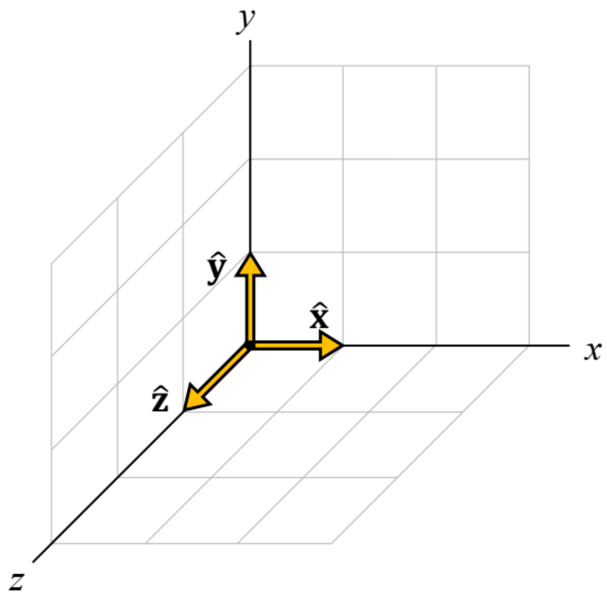


图 1-14 三维空间笛卡尔坐标系中单位矢量的定义。

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}$$

矢量的加法（$\vec{\boldsymbol{A}}+\vec{\boldsymbol{B}}$）

矢量相加的结果仍然是一个矢量，称为它们的**合矢量**（resultant）。两个矢量加法的几何图形规则为平行四边形法。其原理是基于矢量的可平移性：矢量只有方向和大小两个属性，并没有位置属性，因此可以认为空间中任何方向相同、大小相等的矢量都是同一个矢量。也就是说，矢量在空间中可以任意平移。两个矢量$\vec{\boldsymbol{A}}$和$\vec{\boldsymbol{B}}$相加的规则为：将矢量$\vec{\boldsymbol{B}}$的起始点平移到矢量$\vec{\boldsymbol{A}}$的末端点，此时矢量$\vec{\boldsymbol{A}}$的起始点到矢量$\vec{\boldsymbol{B}}$的末端点的矢量$\vec{\boldsymbol{D}}$即为它们的和，记为$\vec{\boldsymbol{D}}=\vec{\boldsymbol{A}}+\vec{\boldsymbol{B}}$（图 1-15），矢量的加法可以用它们的分量和单位矢量来解析表示：

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{D}}=\vec{\boldsymbol{A}}+\vec{\boldsymbol{B}} &= A_x\hat{\mathbf{x}}+A_y\hat{\mathbf{y}}+A_z\hat{\mathbf{z}}+B_x\hat{\mathbf{x}}+B_y\hat{\mathbf{y}}+B_z\hat{\mathbf{z}}\\ &=(A_x+B_x)\hat{\mathbf{x}}+\left(A_y+B_y\right)\hat{\mathbf{y}}+(A_z+B_z)\hat{\mathbf{z}}\\ &=D_x\hat{\mathbf{x}}+D_y\hat{\mathbf{y}}+D_z\hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

其中，矢量$\vec{\boldsymbol{D}}$的分量为：

$$D_x=A_x+B_x \quad D_y=A_y+B_y \quad D_z=A_z+B_z$$

即：两个矢量相加等于它们的分量分别相加。由两个矢量的加法可以证明多个矢量的加法，即连续将多个矢量依次平移至首尾相连，第一个矢量的起始点到最后一个矢量末端点的矢量即为多个矢量的合矢量。可以证明矢量加法对于不在同一平面内的多个矢量相加也成立。譬如，我们现在可以严格证明图 1-13 中的矢量$\vec{\boldsymbol{A}}$等于其在三个坐标轴上的投影矢量的相加：$\vec{\boldsymbol{A}}=6\hat{\mathbf{x}}+4\hat{\mathbf{y}}+2\hat{\mathbf{z}}$。

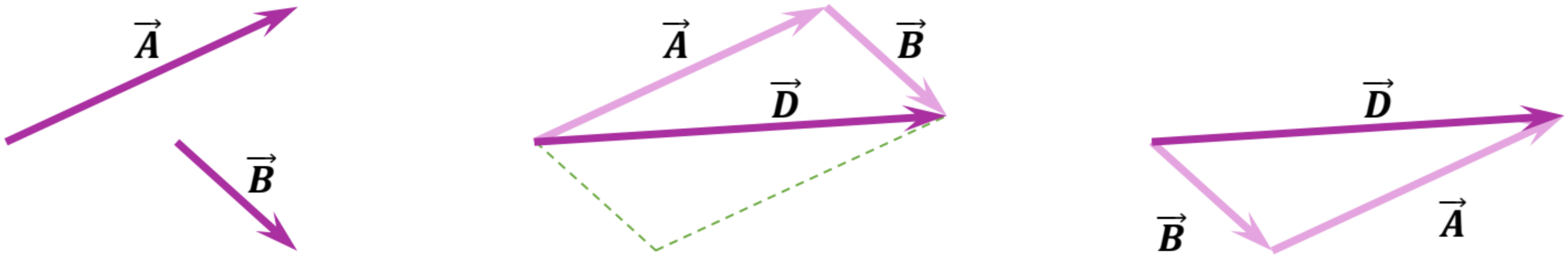


图 1-15 两个矢量相加的几何表示。矢量加法满足交换律，因此只要矢量首尾相连，得到的和矢量总是相同的。

由平行四边形法，我们还可以证明：

- 矢量加法满足交换律：$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$
- 矢量加法满足结合律：$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$

矢量的减法（$\vec{A}-\vec{B}$）

定义**矢量的负**（negative of vector）$-\vec{B}$，这里负号表示方向相反，该矢量与矢量$\vec{B}$大小相等、方向相反（即反平行）。此时矢量$\vec{A}$减去矢量$\vec{B}$的结果仍为一矢量，设为$\vec{D}$，则有$\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+\left(-\vec{B}\right)$，我们就可以用相加的方法得到矢量减法的几何表示，如图 1-16 所示。类似的，矢量的减法也可以用它们的分量和单位矢量来解析表示：

$$\begin{aligned}\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}&=A_x\hat{\mathbf{x}}+A_y\hat{\mathbf{y}}+A_z\hat{\mathbf{z}}-(B_x\hat{\mathbf{x}}+B_y\hat{\mathbf{y}}+B_z\hat{\mathbf{z}})\\&=(A_x-B_x)\hat{\mathbf{x}}+\left(A_y-B_y\right)\hat{\mathbf{y}}+(A_z-B_z)\hat{\mathbf{z}}\\&=D_x\hat{\mathbf{x}}+D_y\hat{\mathbf{y}}+D_z\hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

其中，矢量$\vec{D}$的分量为：

$$D_x=A_x-B_x\quad D_y=A_y-B_y\quad D_z=A_z-B_z$$

即：两个矢量相减等于他们的分量分别相减。

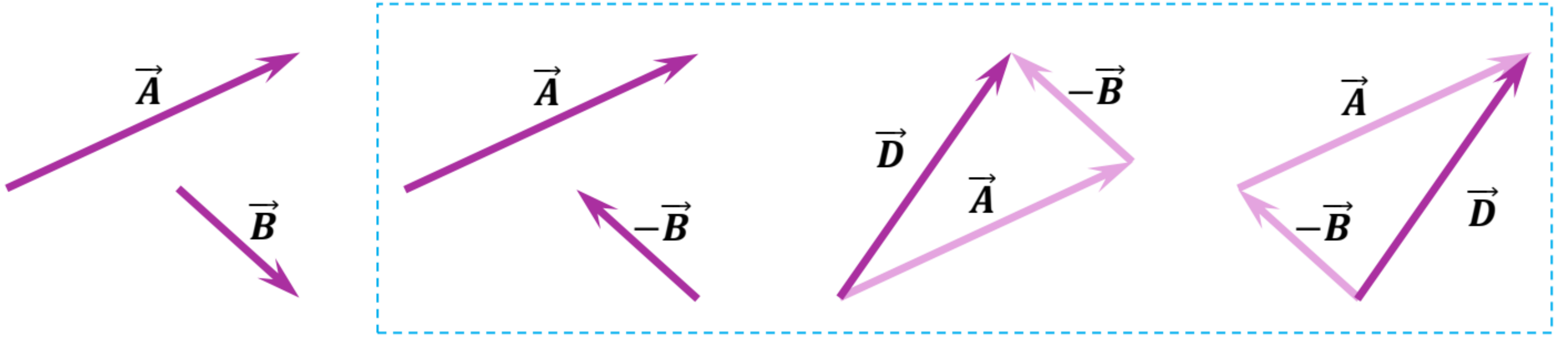


图 1-16 两个矢量相减的几何表示，蓝色虚线框内实则为矢量$\vec{A}$和矢量$-\vec{B}$的加法。

矢量的乘积

矢量的乘积包括矢量和标量相乘，以及矢量和矢量相乘。其中矢量和矢量的乘积有两种不同的形式，分别为**点乘**（·）和**叉乘**（×），它们得到的积分别被称为矢量的**点积**（dot product）和**叉积**（cross product）。

矢量和标量的乘积：矢量$\vec{\boldsymbol{A}}$与标量（或常数）c 的相乘的结果仍为一矢量，设为$\vec{\boldsymbol{D}}$，其方向保持量$\vec{\boldsymbol{A}}$的方向，大小 D 等于 A 乘以 B。如果 B 为一负值，则$\vec{\boldsymbol{D}}$的方向与$\vec{\boldsymbol{A}}$相反。

$$\vec{\boldsymbol{D}} = \vec{\boldsymbol{A}}c = c\vec{\boldsymbol{A}} \qquad D = \ cA$$

矢量$\vec{\boldsymbol{D}}$的各分量为矢量$\vec{\boldsymbol{A}}$的各分量分别乘以 c：

$$D_x = cA_x \qquad D_y = cA_y \qquad D_z = cA_z$$

矢量的点积（$\vec{A}\cdot\vec{B}$）：矢量$\vec{A}$和矢量$\vec{B}$的点积为一标量 D，它的定义为：

$$D = \vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$

其中A、B分别为矢量$\vec{A}$和$\vec{B}$的大小，θ为它们之间的夹角，取值范围为$0 \le \theta < \pi$（图1-17）。从公式上看，矢量的点积并不带方向，为一标量，因此点积也被称为**标积**、**标量积**、**数量积**、**内积**。由点积的定义，我们可以证明：

- 矢量点乘服从交换律：$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$
- 矢量点乘服从分配律：$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$
- 矢量夹角为 90°时，点积为零
- 矢量夹角大于 90°时，点积为负
- 矢量的点积可以用它们的分量表示：

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

即：两个矢量的点积等于它们各分量的乘积之和。

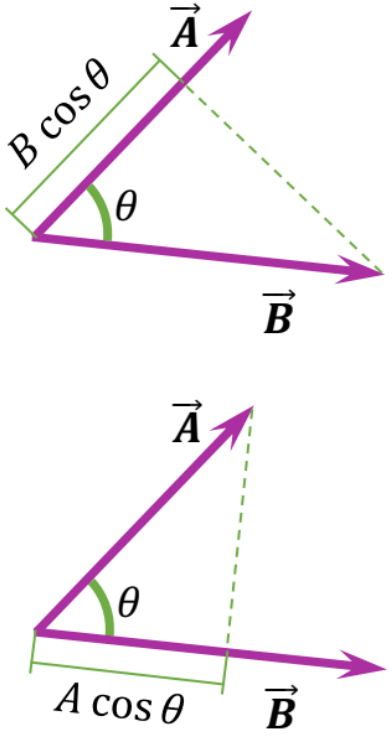


图 1-17 两个矢量点乘的几何表示。其点积等于两个矢量的大小乘以它们之间夹角的余弦值。

矢量的叉积（$\vec{A}\times\vec{B}$）： 矢量$\vec{A}$和矢量$\vec{B}$的叉积的为一矢量，设为$\vec{D}$，其方向垂直于矢量$\vec{A}$和矢量$\vec{B}$所在的平面，取向由右手法则确定；其大小 D 为矢量$\vec{A}$和矢量$\vec{B}$的大小乘以它们之间夹角的正弦值：

$$\vec{D} = \vec{A}\times\vec{B} \qquad D = AB\sin\theta$$

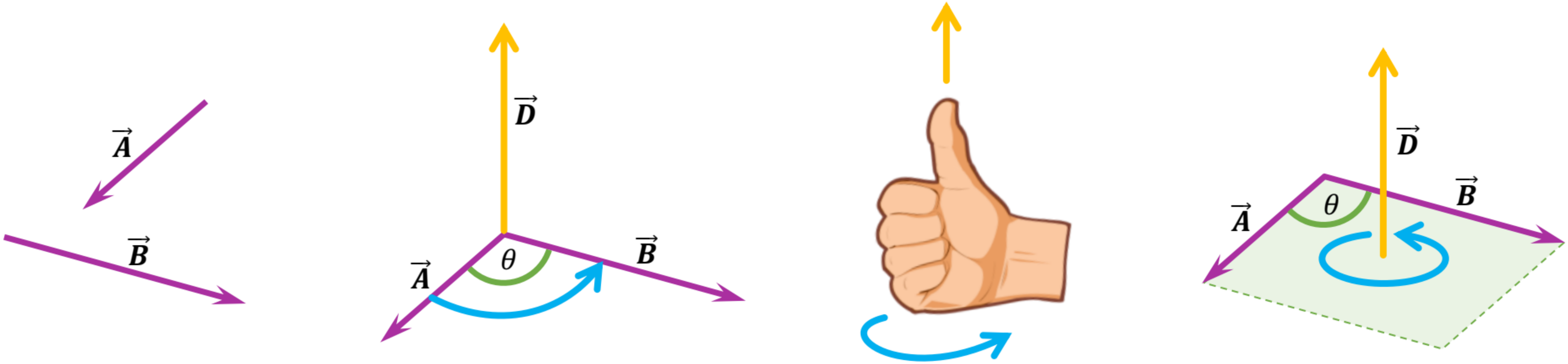
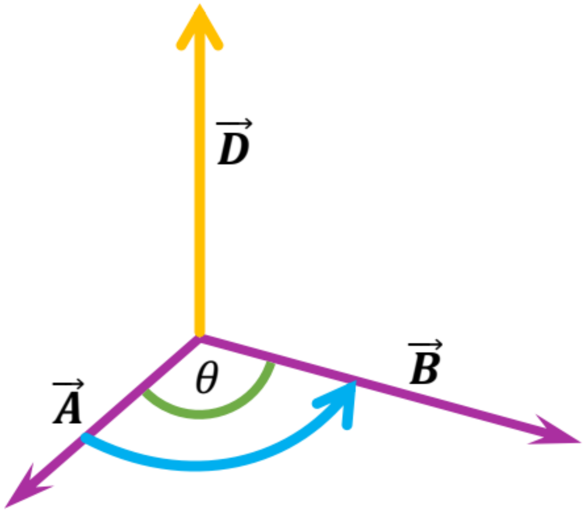


图 1-18 两个矢量叉乘的几何表示。矢量的叉积遵循右手法则。

叉积为矢量，因此又被称为**矢积**、**矢量积**。从定义上我们可以看到，矢量的叉积的大小的绝对值$|D|$等于以两个矢量为边的平行四边形的面积。根据矢量叉乘的定义，我们可以很容易证明单位矢量之间互为叉积关系：$\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{y}}=\hat{\mathbf{z}}$、$\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{z}}=\hat{\mathbf{x}}$、$\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{y}}$。我们还可以证明：



- 矢量叉乘服从反交换律：$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
- 矢量叉乘服从分配律：$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$
- 两个平行或反平行的矢量的叉积为零（平行四边形面积为零）
- 当两个矢量垂直时，其叉积的大小$|D|$为最大：$|D| = |AB|$（$\theta = 90°$）
- 矢量的叉积可以用它们的分量和单位矢量来表示：

$$\vec{D} = \vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{\mathbf{x}} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{\mathbf{y}} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{\mathbf{z}}$$

$$= D_x\hat{\mathbf{x}} + D_y\hat{\mathbf{y}} + D_z\hat{\mathbf{z}}$$

其中，矢量$\vec{D}$的分量为：

$$D_x = A_y B_z - A_z B_y \quad D_y = A_z B_x - A_x B_z \quad D_z = A_x B_y - A_y B_x$$

本节课（4周-2）主要内容：

A. 自然坐标系

B. 功、动能 $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

C. 动能定理（单个质点的功能原理）

D. 势能

下节课主要内容：

E. 质点系、质心系

F. 保守力

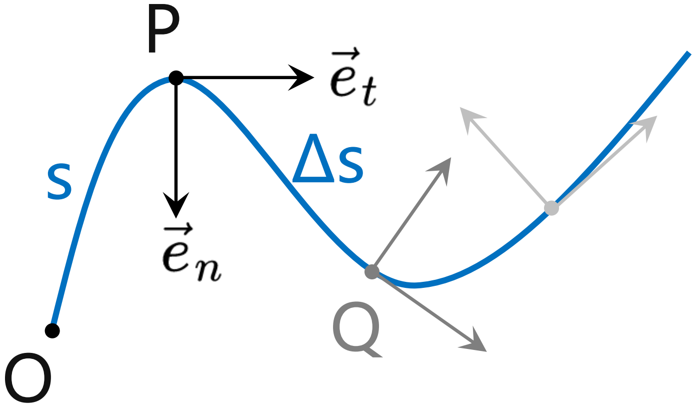
G. 功能原理

E. 机械能守恒

A. 自然坐标系

在某质点运动的轨迹线上任取一点O为自然坐标原点，以质点所在位置P点与O点间轨迹的路程 ***s*** 来确定质点的位置，则称***s*** 为质点的自然坐标，其运动方程：

$$s = s\left(t\right)$$



当质点经Δt时间内从P点达Q点，运动的路程为Δs：

$$\Delta s = s\left(t + \Delta t\right) - s(t)$$

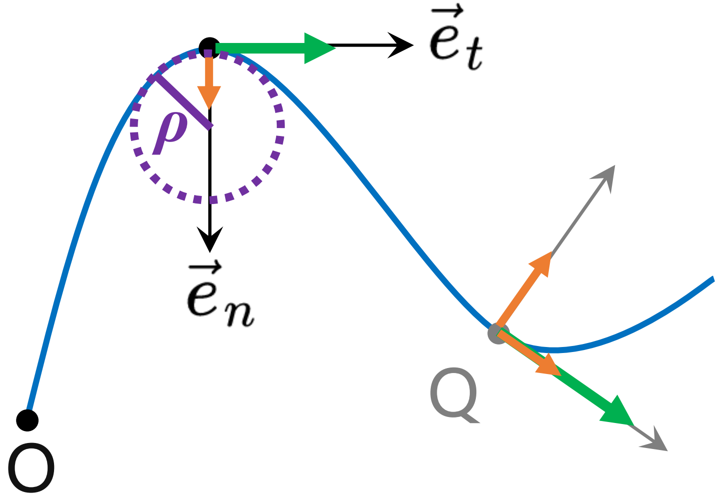
在质点轨迹切向取一单位矢量$\boldsymbol{e}_t$，其称之为**切向单位矢量** $\vec{e}_t$

在e_t垂直且指向质点轨迹凹侧的方向处取单位矢量$\boldsymbol{e}_n$，称作**法向单位矢量** $\vec{e}_n$

速度矢量的大小（速率）： $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$

速度方向即为轨道的切向，则速度矢量可表示为: $\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{e}_t$

加速度矢量: $\vec{a} = \underline{a_1\vec{e}_t} + \underline{a_2\vec{e}_n}$



a$_1$:切向加速度，改变速度的大小

a$_2$:法向加速度，改变速度的方向

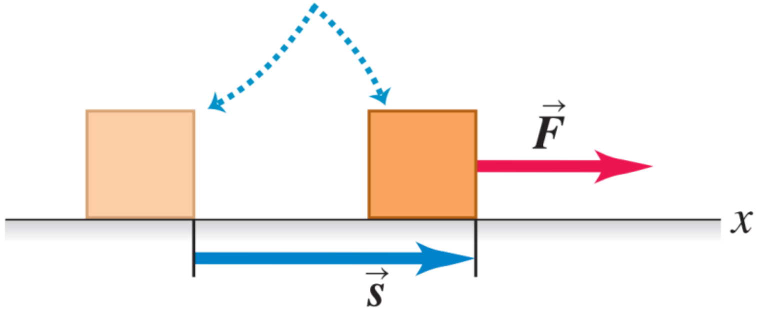
$$a_1 = \frac{dv}{dt} \qquad a_2 = v\frac{d\theta}{dt} = v\frac{ds}{dt}\frac{d\theta}{ds} = \frac{v^2}{\rho}$$

其中，$\rho = \frac{ds}{d\theta} = \left|\frac{ds}{d\theta}\right|$ 为质点处轨迹的曲率半径，始终为正

B. 功、动能

回顾高中学过的力和功：

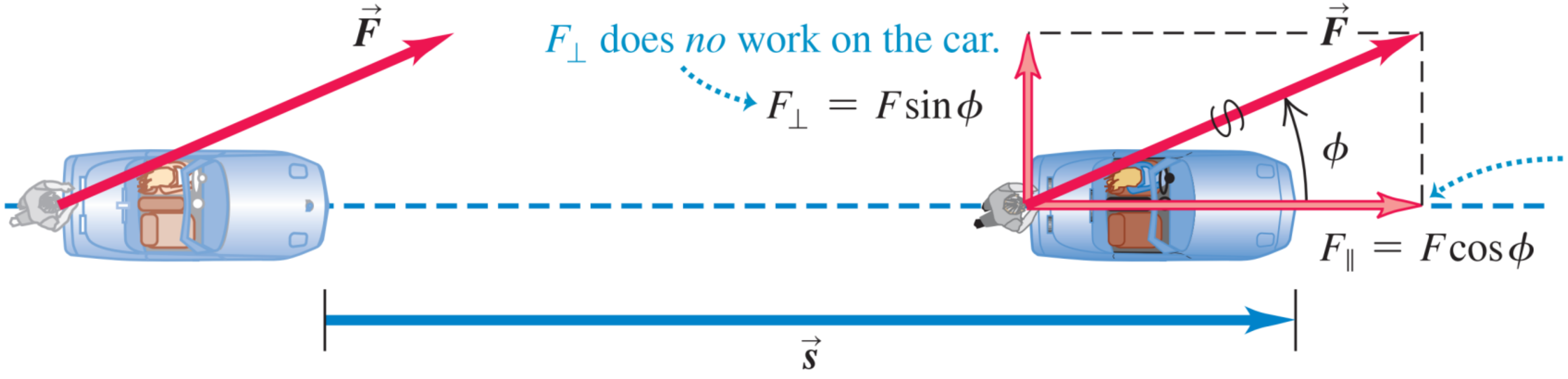
$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$



If a particle moves through a displacement $\vec{s}$ while a constant force $\vec{F}$ acts on it in the same direction ...

... the work done by the force on the particle is $W = Fs$.

只有在物体移动方向上的分力 $F_{//}$ 才做功（does work）：



The car moves through displacement $\vec{s}$ while a constant force $\vec{F}$ acts on it at an angle ϕ to the displacement.

$F_{\perp}$ does *no* work on the car.

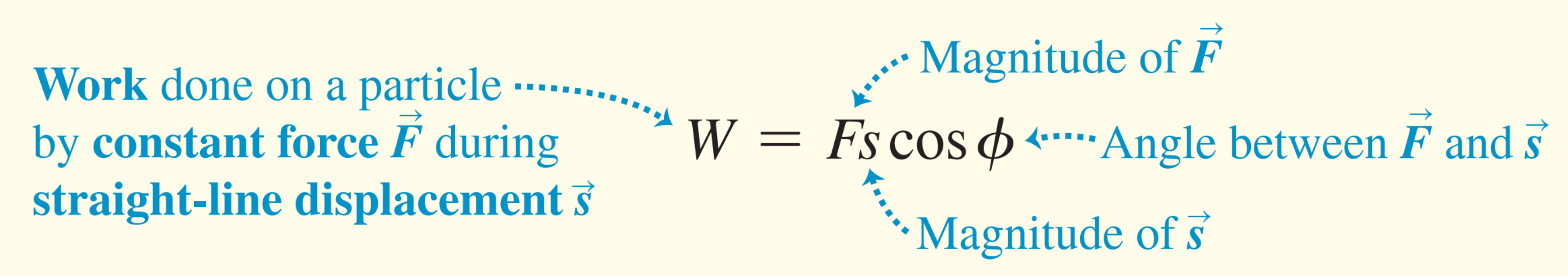
$F_{\perp} = F\sin\phi$

$F_{\parallel} = F\cos\phi$

Only $F_{\parallel}$ does work on the car:

$$W = F_{\parallel}s = (F\cos\phi)s$$
$$= Fs\cos\phi$$

（1）功（Work）的矢量表达：



Work done on a particle by **constant force $\vec{F}$** during **straight-line displacement $\vec{s}$**

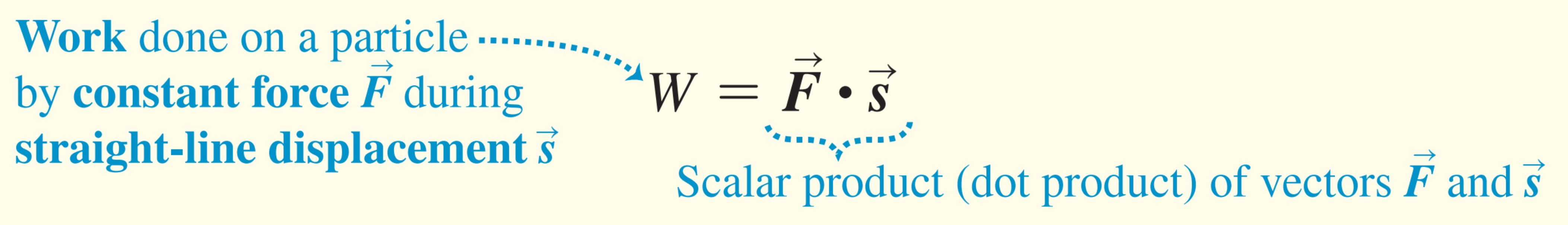
$$W = Fs\cos\phi$$

Magnitude of $\vec{F}$

Angle between $\vec{F}$ and $\vec{s}$

Magnitude of $\vec{s}$

我们知道，在数学上，向量的点乘： $a \bullet b = |a||b|\cos\theta$



Work done on a particle by **constant force $\vec{F}$** during **straight-line displacement $\vec{s}$**

$$W = \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{s}}_{\text{Scalar product (dot product) of vectors } \vec{F} \text{ and } \vec{s}}$$

功等于力矢量和位移矢量的点乘。它是一个标量，没有方向，但有正负.

功的单位：焦耳（joule），1 joule = (1 newton) (1 meter)，1 J = 1 N·m

正功、负功和零功

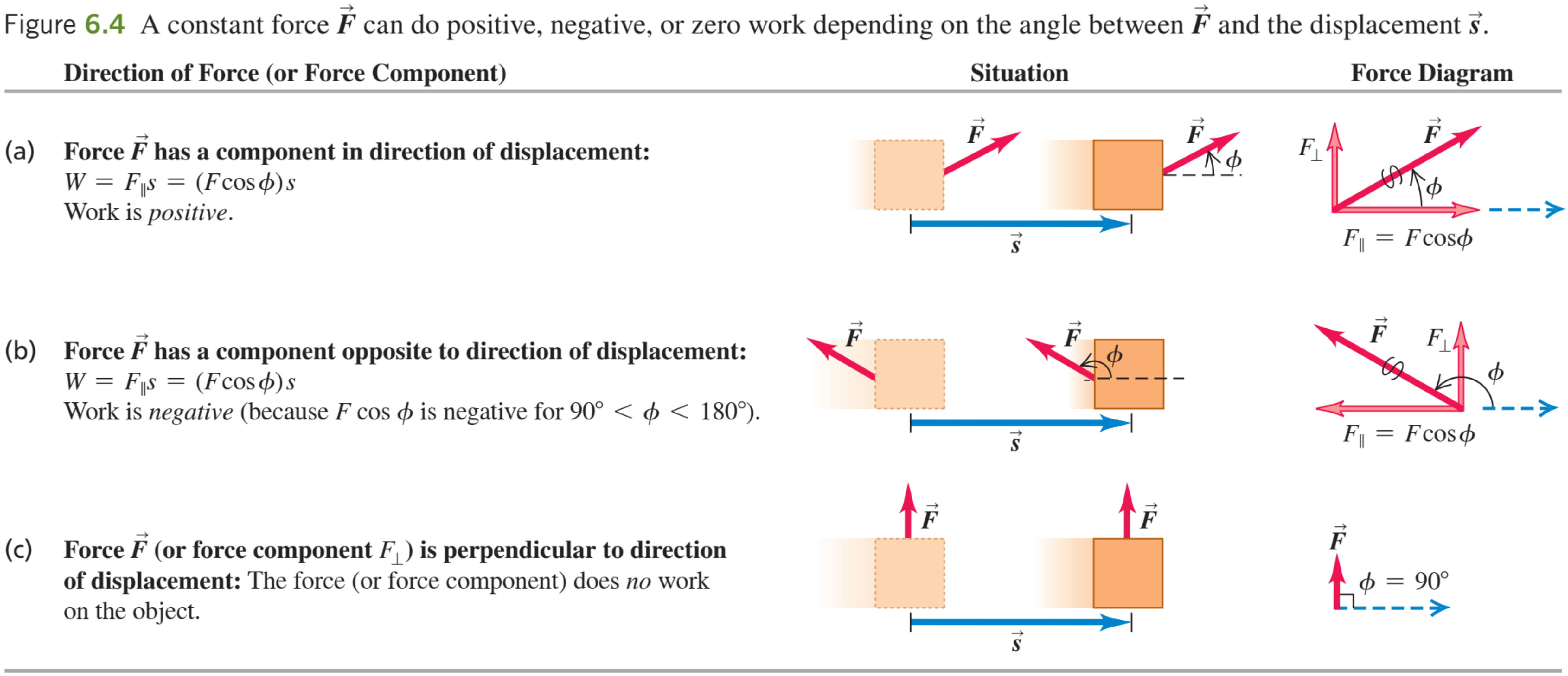


Figure 6.4 A constant force $\vec{F}$ can do positive, negative, or zero work depending on the angle between $\vec{F}$ and the displacement $\vec{s}$.

Direction of Force (or Force Component) **Situation** **Force Diagram**

(a) **Force $\vec{F}$ has a component in direction of displacement:**
$W = F_{\parallel}s = (F\cos\phi)s$
Work is *positive*.

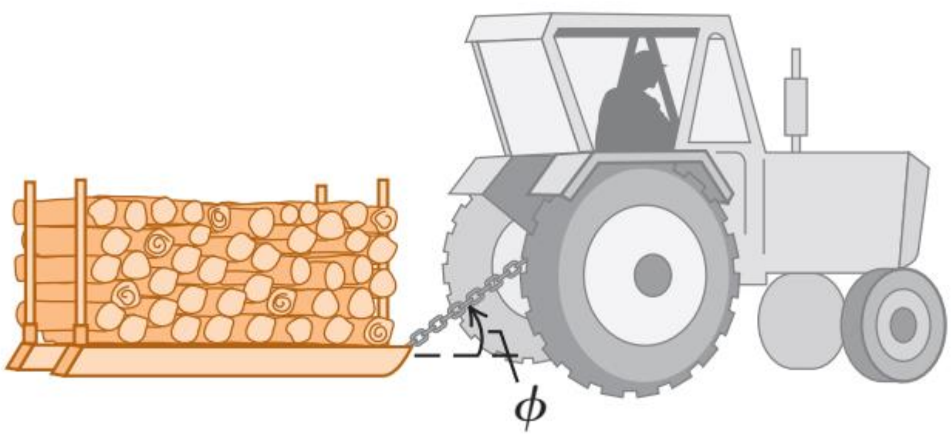
(b) **Force $\vec{F}$ has a component opposite to direction of displacement:**
$W = F_{\parallel}s = (F\cos\phi)s$
Work is *negative* (because $F\cos\phi$ is negative for $90° < \phi < 180°$).

(c) **Force $\vec{F}$ (or force component $F_{\perp}$) is perpendicular to direction of displacement:** The force (or force component) does *no* work on the object.

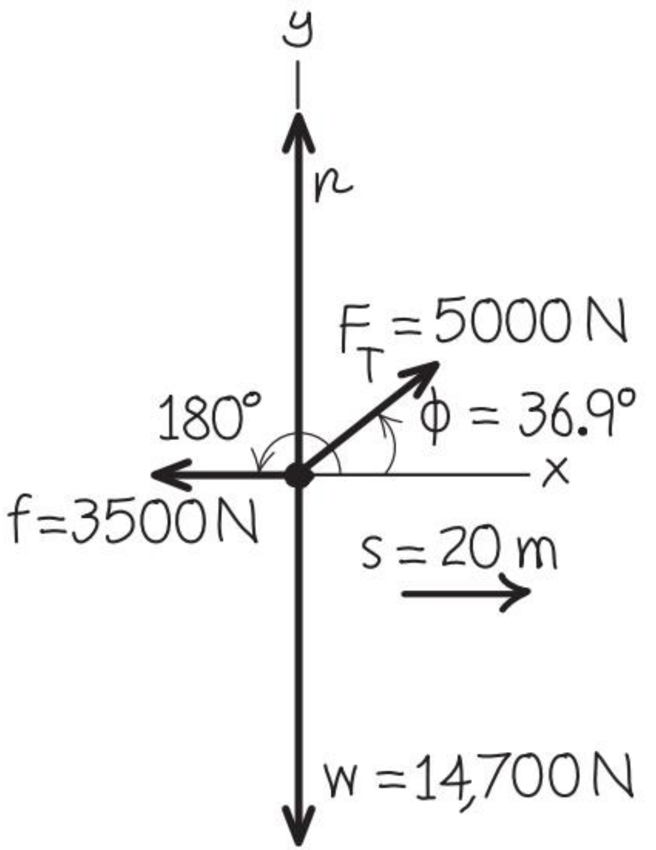
合力作工

合力对这堆木头做了多少功?

(a)



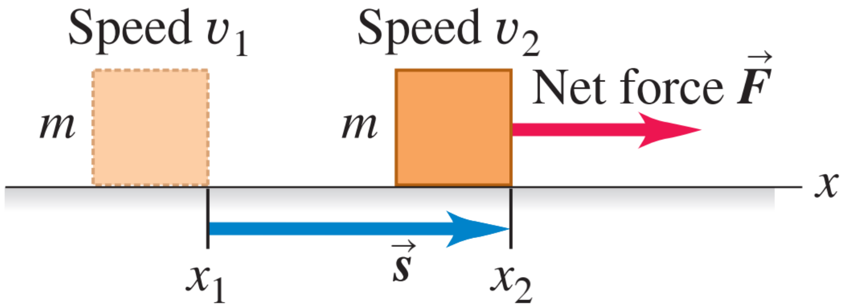
(b) Free-body diagram for sled



$$\sum F_x = F_\mathrm{T}\cos\phi + (-f) = (5000\ \mathrm{N})\cos 36.9° - 3500\ \mathrm{N}$$
$$= 500\ \mathrm{N}$$
$$\sum F_y = F_\mathrm{T}\sin\phi + n + (-w)$$
$$= (5000\ \mathrm{N})\sin 36.9° + n - 14{,}700\ \mathrm{N}$$

（2）功与动能：动能的定义

考虑直线运动中不变的力做功的情况：



$$v_2^2 = v_1^2 + 2a_x s$$

$$a_x = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2s} \qquad F = ma_x = m\frac{v_2^2 - v_1^2}{2s}$$

$$\mathbf{W} = Fs = \boxed{\frac{1}{2}mv_2^2} - \boxed{\frac{1}{2}mv_1^2}$$

定义**物体的质量与其速率平方的乘积的一半**为**动能（Kinetic energy）**：

Kinetic energy of a particle

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

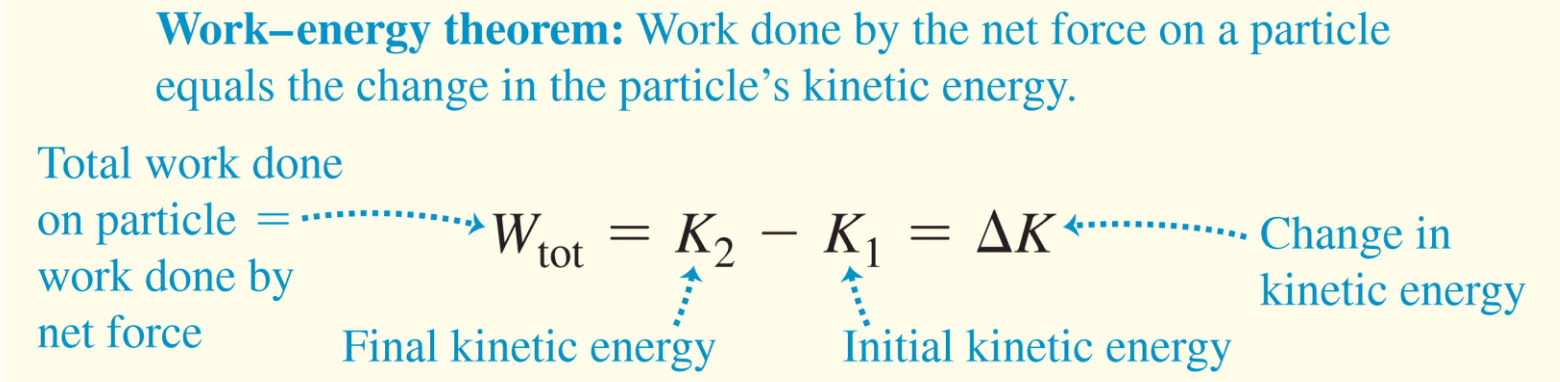
Mass of particle

Speed of particle

质量为 m 的物体的动能等于将其从静止加速到 v 所做的功。

（2）功与动能：功能原理

功能原理(Work-energy theorem)：一个质量为 m 的质点，受到的合力 F 做的总功，等于其动能的变化



Work–energy theorem: Work done by the net force on a particle equals the change in the particle’s kinetic energy.

Total work done on particle = work done by net force

$$W_{\text{tot}} = K_2 - K_1 = \Delta K$$

Final kinetic energy

Initial kinetic energy

Change in kinetic energy

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2$$

注：这里的功能原理是最简单的情况，也跟后面要讲的质点的动能定理等价。后面用微积分推导动能定理

小问题：4X100米接力赛中国队ABCD四人组队获得金牌。虽然四人都有功劳，但请问谁对接力棒做了功？

理解动能和功能原理

按动能从最大到最小的顺序对以下物体进行排序。

1. 2 kg的物体以 5.0 m/s的速度运动;
2. 1个 1.0 kg的物体的初始状态是静止的，然后对它做了功 30 J;
3. 1个 1.0 kg的物体的初速度是 4.0 m/s，然后对它做了功20 J;
4. 1个 2.0 kg物体的初速度是 10 m/s，然后又对另一个物体做了功 80 J。

（3）直线运动中变力做的功：

计算变化的功，需要用积分的思想：

$$W = F_{ax}\Delta x_a + F_{bx}\Delta x_b + \cdots$$

可知，功等于力对距离的积分：

Work done on a particle by a **varying *x*-component of force F_x** during **straight-line displacement** along *x*-axis

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx$$

Upper limit = final position

Integral of *x*-component of force

Lower limit = initial position

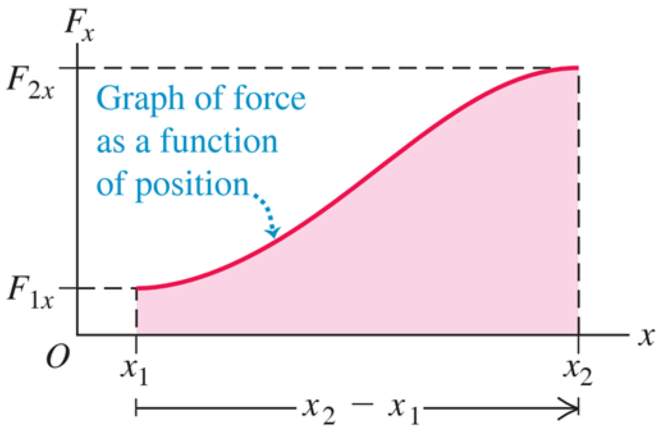
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx}\frac{dx}{dt} = v_x\frac{dv_x}{dx} \qquad W_{\text{tot}} = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx = \int_{x_1}^{x_2} ma_x\,dx = \int_{x_1}^{x_2} mv_x\frac{dv_x}{dx}\,dx$$

$$W_{\text{tot}} = \int_{v_1}^{v_2} mv_x\,dv_x = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2$$

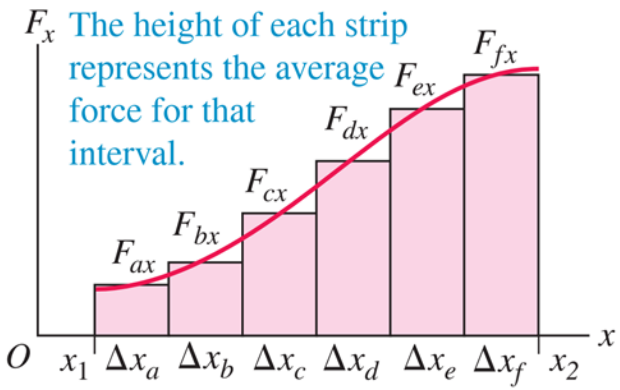
即：变力*F*做的功也还是动能的变化，功能原理依然成立

(a) A particle moves from x_1 to x_2 in response to a changing force in the *x*-direction.

(b) The force F_x varies with position x ...

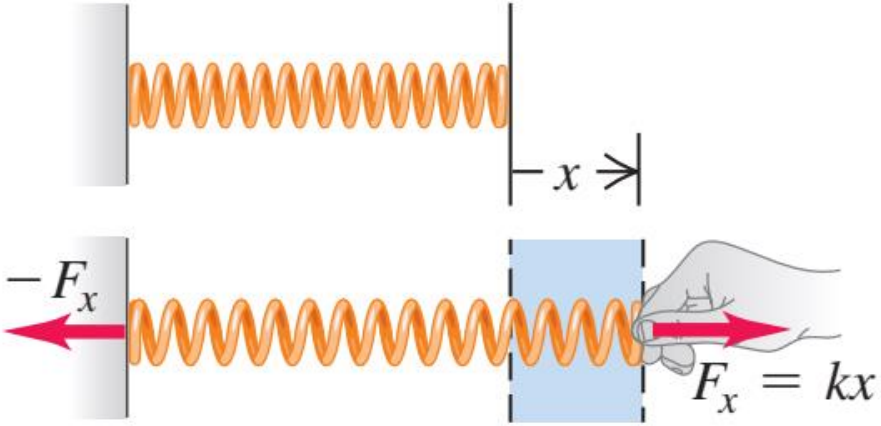


(c) ... but over a short displacement Δx, the force is essentially constant.



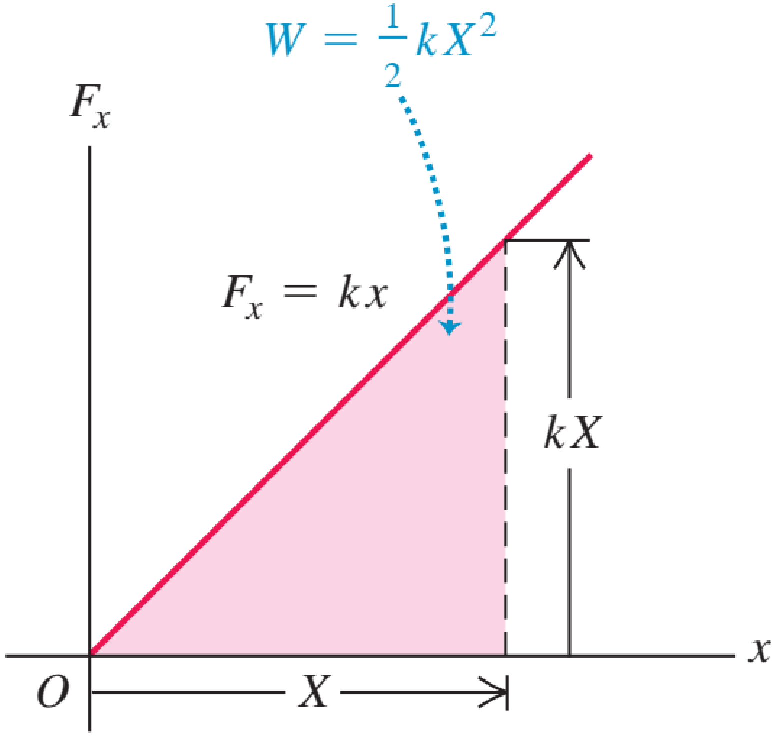
（3）直线运动中变力做的功：

弹簧做功



$$W = \int_0^X F_x\,dx = \int_0^X kx\,dx = \tfrac{1}{2}kX^2$$

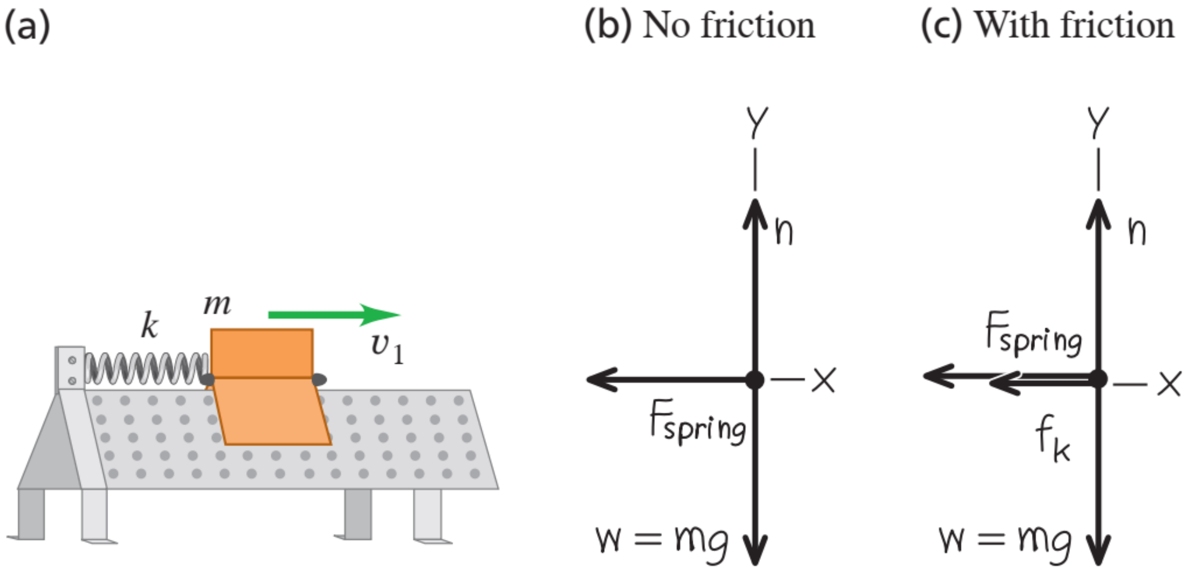
The area under the graph represents the work done on the spring as the spring is stretched from $x = 0$ to a maximum value X:



一个质量为0.1千克的空气轨道滑行机通过一个具有20.0 N/m弹性常数的弹簧连接到水平轨道的末端。最初，弹簧没有拉伸，滑行机以1.50 m/s的速度移动向右。

a) 不考虑摩擦力，找到滑行机移动到的最大距离 d；

b) 考虑动摩擦力，动摩擦系数$\mu_k = 0.47$，d为多大?


(a)

(b) No friction

(c) With friction

(4）功率（Power）：

单位：瓦特Watt (W), 1W = 1J/s

功率：单位时间内所做的功，描述做功的快慢。

平均功率：

Average power during time interval Δt

$$P_{\mathrm{av}} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Work done during time interval

Duration of time interval

瞬时功率为功对时间的微分：

Instantaneous power

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

Time rate of doing work

Average power over infinitesimally short time interval

瞬时功率等于力矢量和速度矢量的点乘，把 $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ 代入上式微分即得：

Instantaneous power for a force doing work on a particle

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Force that acts on particle

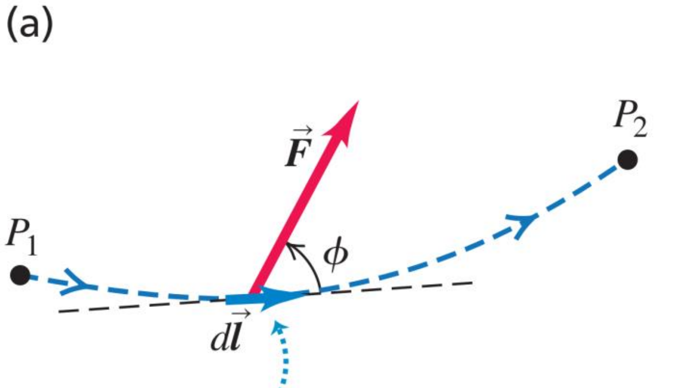
Velocity of particle

（5）曲线（变力）运动中功的计算：

tip：除抛物线外的曲线运动通常都是变力

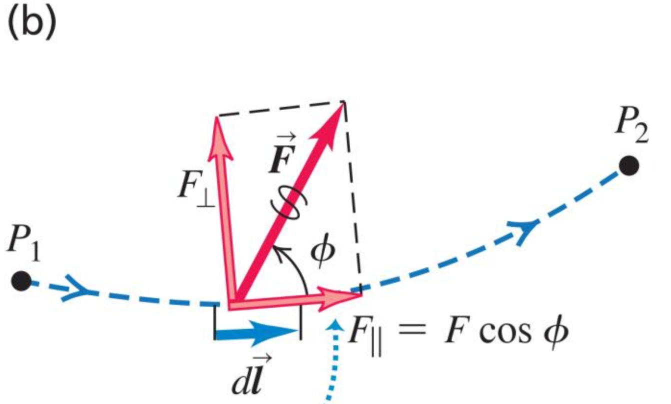
处理曲线问题，尤其需要用微积分的思想

对曲线上矢量的积分，数学上称为：第二类曲线积分



During an infinitesimal displacement $d\vec{l}$, the force $\vec{F}$ does work dW on the particle:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F\cos\phi \, dl$$



Only the component of $\vec{F}$ parallel to the displacement, $F_\parallel = F\cos\phi$, contributes to the work done by $\vec{F}$.

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F\cos\phi \, dl = F_\parallel \, dl$$

Upper limit = final position

Scalar product (dot product) of $\vec{F}$ and displacement $d\vec{l}$

Work done on a particle by a **varying force** $\vec{F}$ along a **curved path**

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{P_1}^{P_2} F\cos\phi \, dl = \int_{P_1}^{P_2} F_\parallel \, dl$$

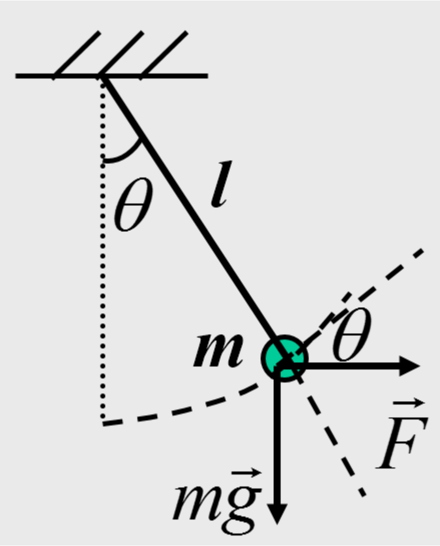
Lower limit = initial position

Angle between $\vec{F}$ and $d\vec{l}$

Component of $\vec{F}$ parallel to $d\vec{l}$

曲线变力做功例题

小球在水平变力 $\vec{F}$ 作用下缓慢移动，即在所有位置上均**近似**处于力平衡状态，直到绳子与竖直方向成θ角。求：(1) $\vec{F}$ 的功，(2) 重力的功。



解：$F = mg\tan\theta$

$$F_{||} = F\cos\theta = mg\tan\theta\cos\theta = mg\sin\theta$$

$$W_F = \int \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int F_{||}\mathrm{d}s = \int_0^{\theta} mg\sin\theta\, l\mathrm{d}\theta$$

$$= mgl(1-\cos\theta)$$ 变力做功

$$W_{mg} = \int m\vec{g}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_0^{\theta} -mg\sin\theta\, l\mathrm{d}\theta = -mgl(1-\cos\theta)$$

恒力　曲线运动

（6）功：力的空间积累（积分）效应

现在我们有了更深的认识：功描述的是力在空间的积累效应。用空间矢量 $\vec{r}$ 来表达功：

$$\boxed{W=\int_a^b \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_a^b F\cos\alpha \mathrm{d}s}$$

（这里及后面用A表示功，以防与功的单位单位瓦特W混淆）

1. 功与力和路径都有关

$$\mathrm{d}W=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z$$

$$W=\int_{x_a}^{x_b}F_x\mathrm{d}x+\int_{y_a}^{y_b}F_y\mathrm{d}y+\int_{z_a}^{z_b}F_z\mathrm{d}z$$

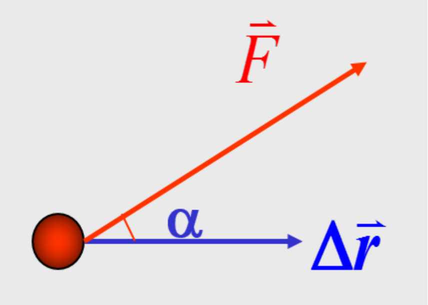
2. 功与参照系有关

$\vec{F}$ 与参照系无关，

但位移与参照系有关

- 恒力的功：

$$W = F\cos\alpha\left|\Delta\vec{r}\right| = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

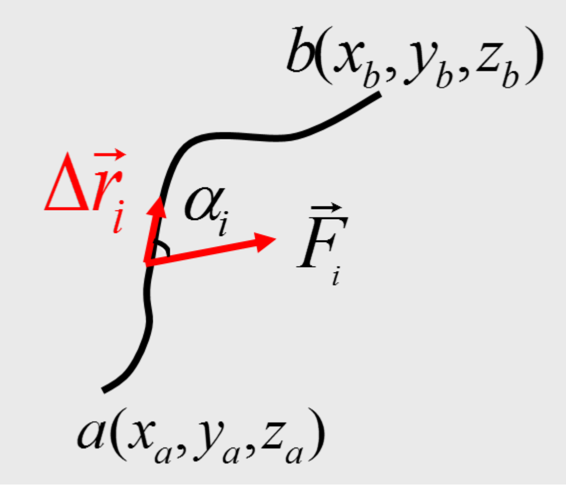


- 变力的功：

$$\Delta W_i = F_i\cos\alpha_i\left|\Delta\vec{r}_i\right|$$

$$W = \sum_i F_i\cos\alpha_i\left|\Delta\vec{r}_i\right| = \sum_i \vec{F}_i\cdot\Delta\vec{r}_i$$

等于各阶段 $\Delta \boldsymbol{r}_i$ 做的功的代数和：



- 合力的功：

$$W = \int_a^b\left(\sum_i\vec{F}_i\right)\cdot d\vec{r} = \sum_i\int_a^b\vec{F}_i\cdot d\vec{r} = \sum_i W_i$$

等于各个分力 F_i 做的功 W_i 的代数和

（7）功和动能的一些性质：

① 动能是标量，是状态量v的单值函数，也是状态量。

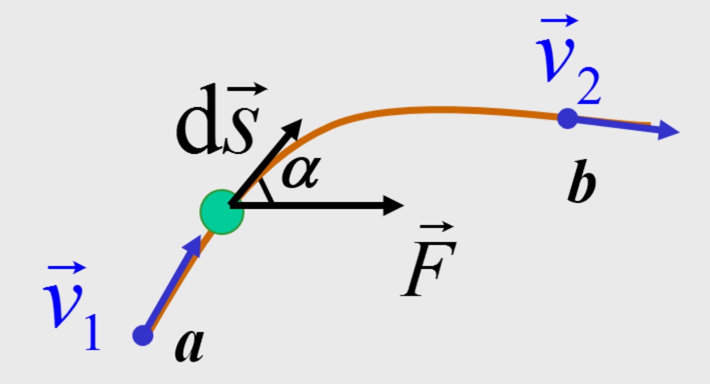
② 功与动能的区别和联系：它们的单位和量纲相同；动能是状态量，功是过程量。外力的功是动能变化的量度。

③ 动能定理由牛顿第二定律导出，因此仅适用于惯性系。动能与参考系有关。动能定理提供一种计算功的方法。

C. 质点的动能定理

现在，我们可以用矢量积分来推导出动能定理

设质点 **m** 在力的作用下沿曲线从 ***a*** 点移动到 ***b*** 点



$$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F\cos\alpha\,\mathrm{d}s$$

$$F\cos\alpha = ma_{\mathrm{t}} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}W = F\cos\alpha\,\mathrm{d}s = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s = mv\mathrm{d}v$$

总功：

$$W = \int \mathrm{d}A = \int_{v_1}^{v_2} mv\mathrm{d}v = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = E_{\mathrm{k}b} - E_{\mathrm{k}a}$$

无论走的路径是什么样的，力的作用方向、过程是什么样的，总功可以由起始+终末的状态确定！

质点的动能定理：净合外力（net force）对质点所做的功等于质点动能的变化。

$$\boxed{W=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=E_{\mathrm{k}b}-E_{\mathrm{k}a}}$$

这就是动能定理，表明外界向物体所做的功等于物体动能的增量，将外界的作用与系统状态参量的变化联系起来。

说明：

1. 合外力的功是动能变化的量度。$W>0\rightarrow E_{\mathrm{k}b}>E_{\mathrm{k}a}, W<0\rightarrow E_{\mathrm{k}b}<E_{\mathrm{k}a}$
2. W, E_{k} 与参考系有关，不同惯性系里它们的大小是不一样的
3. **动能定理只在惯性系中成立。**
4. 微分形式：$\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}$，$\vec{F}\cdot\vec{v}=\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}}{\mathrm{d}t}$

可以看到，物体的速度越大，动能越大。

水刀，一种环保的冷切割加工工艺。就是由普通水经过一个超高压加压器，将水加压至400mpa (60000psi)，然后通过一个极细小的喷嘴产生一道**速度每秒近千米（约音速的3倍）**的水箭，这道水箭就像一把切削加工的利剑，对所需要加工的工件进行切削加工。

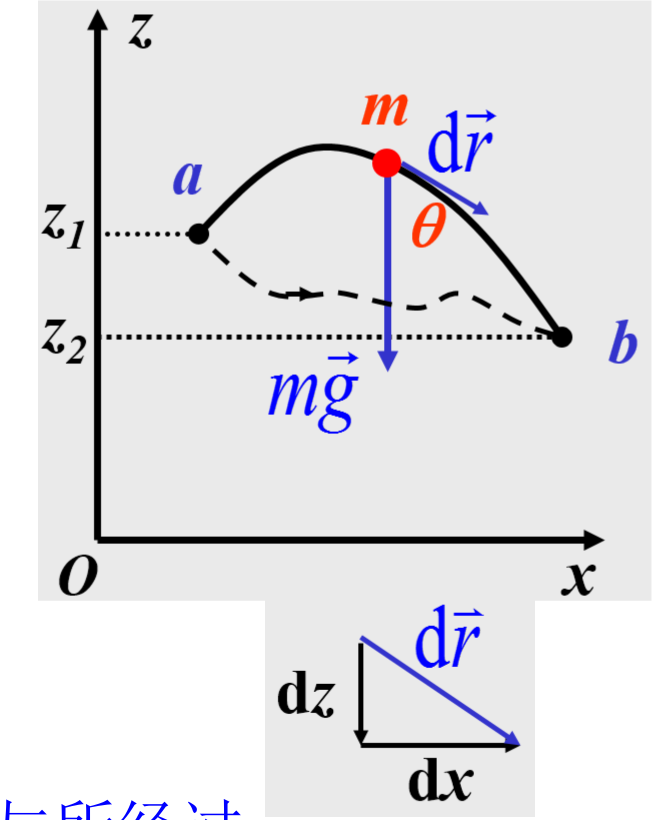
几种常见力的做功：重力

$$dW = m\vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$m\vec{g} = -mg\vec{k} \qquad \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}z\vec{k}$$

$$dW = -mg\vec{k} \cdot (\mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}z\vec{k}) = -mg\mathrm{d}z$$

$$\boxed{W = -mg\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z = mgz_1 - mgz_2}$$



- 重力作功只与质点的起始和终了位置有关，而与所经过的路径无关。

几种常见力的做功：万有引力

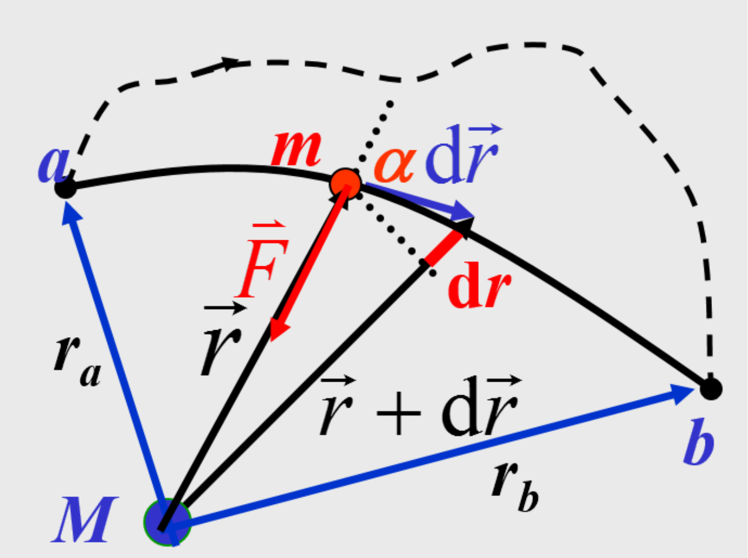
设质量为*M*的质点固定，另一质量为*m*的质点在*M*的引力场中从*a*点运动到*b*点。

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

$$W = \int_{r_a}^{r_b} -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

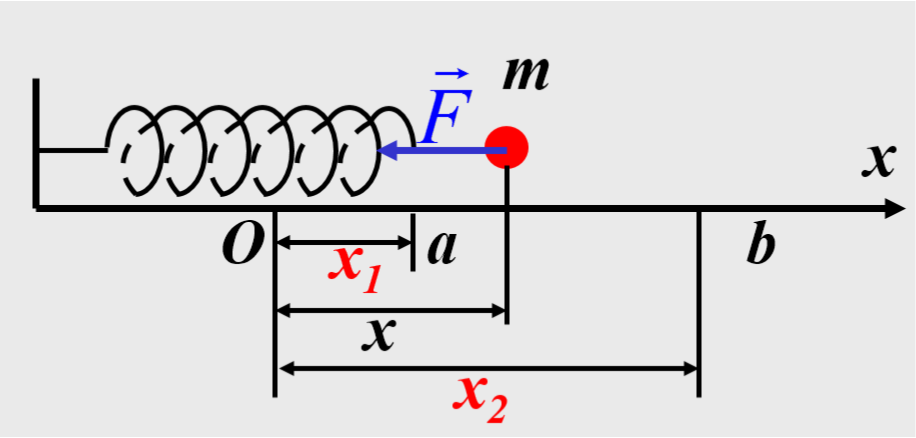
$$\vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = r\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos\alpha = r\mathrm{d}r$$

$$\boxed{W = -GMm\int_{r_a}^{r_b}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -GMm\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)}$$



- 万有引力的功仅由物体的始末位置决定，而与路径无关。

几种常见力的做功：弹性力



$$\vec{F}=-kx\vec{i}$$

$$W=\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{x}=\int_{x_1}^{x_2}-kx\vec{i}\cdot\mathrm{d}x\vec{i}=-\int_{x_1}^{x_2}kx\mathrm{d}x$$

$$\boxed{W=\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}kx_2^2}$$

- 弹性力作功只与质点的起始和终了位置有关，而与质点运动的路径无关。

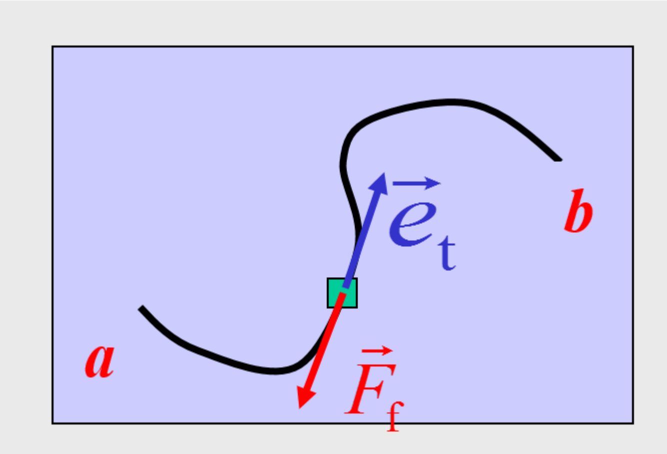
几种常见力的做功：摩擦力

$$\vec{F}_{\mathrm{f}} = -\mu mg\vec{e}_{\mathrm{t}}$$

$$a \to b$$

$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{\mathrm{f}} = \int_a^b -mg\mu\vec{e}_{\mathrm{t}} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_a^b -mg\mu \mathrm{d}s = -F_{\mathrm{f}} S_{ab}$$

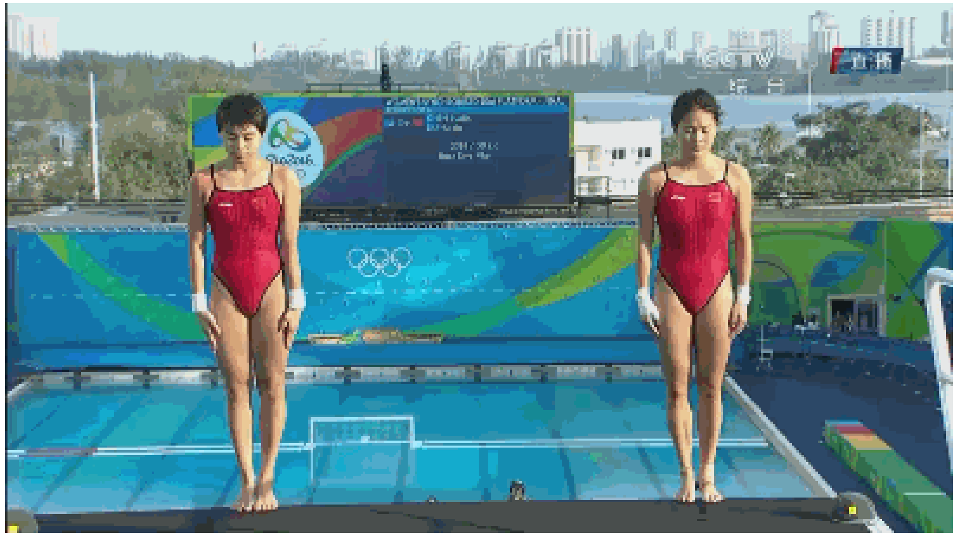


➢ 摩擦力做功与路径有关！

D. 势能

跳水运动员的入水速度从哪里来？

有助跑，是否助跑速度变成入水速度？

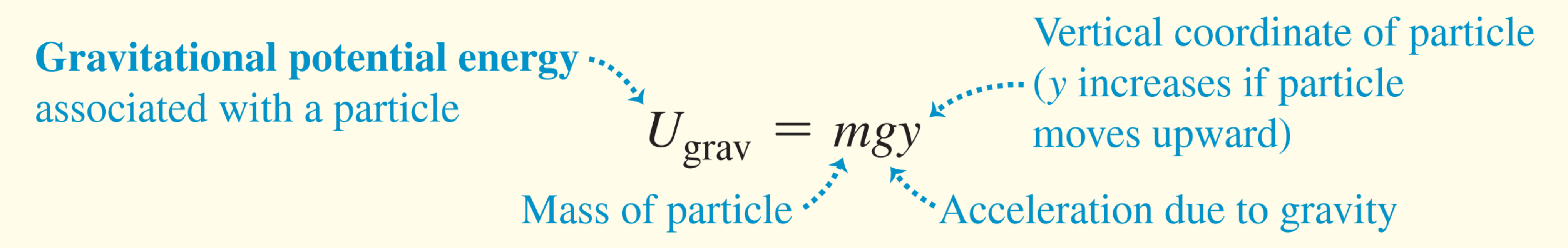


没有助跑，入水速度一样快

需要引入**势能 (potential energy)**的概念，其大小和变化只和物体的位置有关，

用于处理前述做功只与始末位置有关的力，如重力、万有引力、弹力，。。

重力势能：



Gravitational potential energy associated with a particle

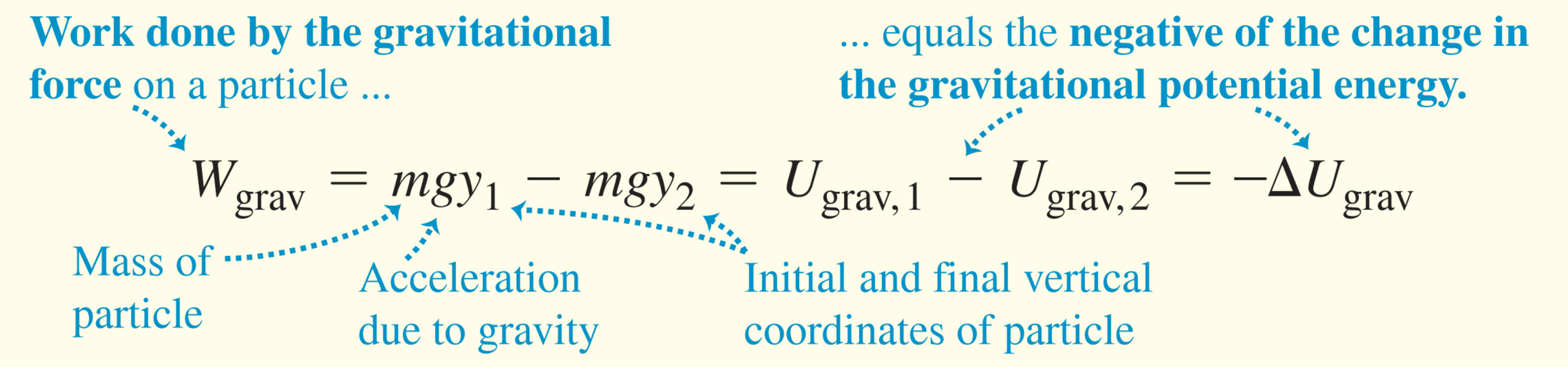
$$U_{\text{grav}} = mgy$$

Vertical coordinate of particle (*y* increases if particle moves upward)

Mass of particle

Acceleration due to gravity

重力做的功，等于负的重力势能变化：



Work done by the gravitational force on a particle ...

... equals the **negative of the change in the gravitational potential energy.**

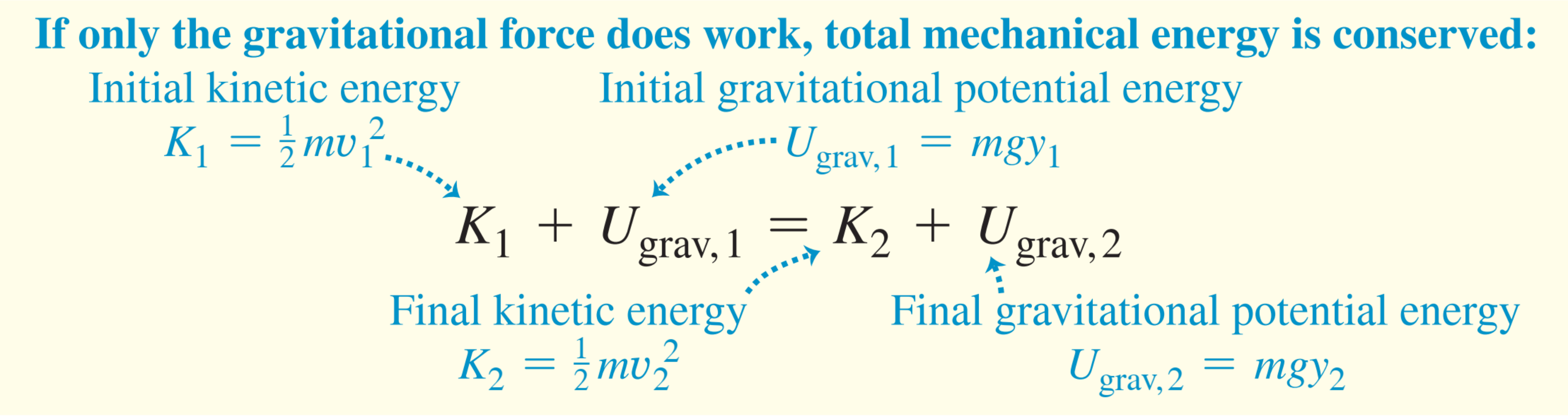
$$W_{\text{grav}} = mgy_1 - mgy_2 = U_{\text{grav},1} - U_{\text{grav},2} = -\Delta U_{\text{grav}}$$

Mass of particle

Acceleration due to gravity

Initial and final vertical coordinates of particle

如果只有重力做功，那么总机械能守恒：



If only the gravitational force does work, total mechanical energy is conserved:

Initial kinetic energy

$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$

Initial gravitational potential energy

$U_{\text{grav},1} = mgy_1$

$$K_1 + U_{\text{grav},1} = K_2 + U_{\text{grav},2}$$

Final kinetic energy

$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$

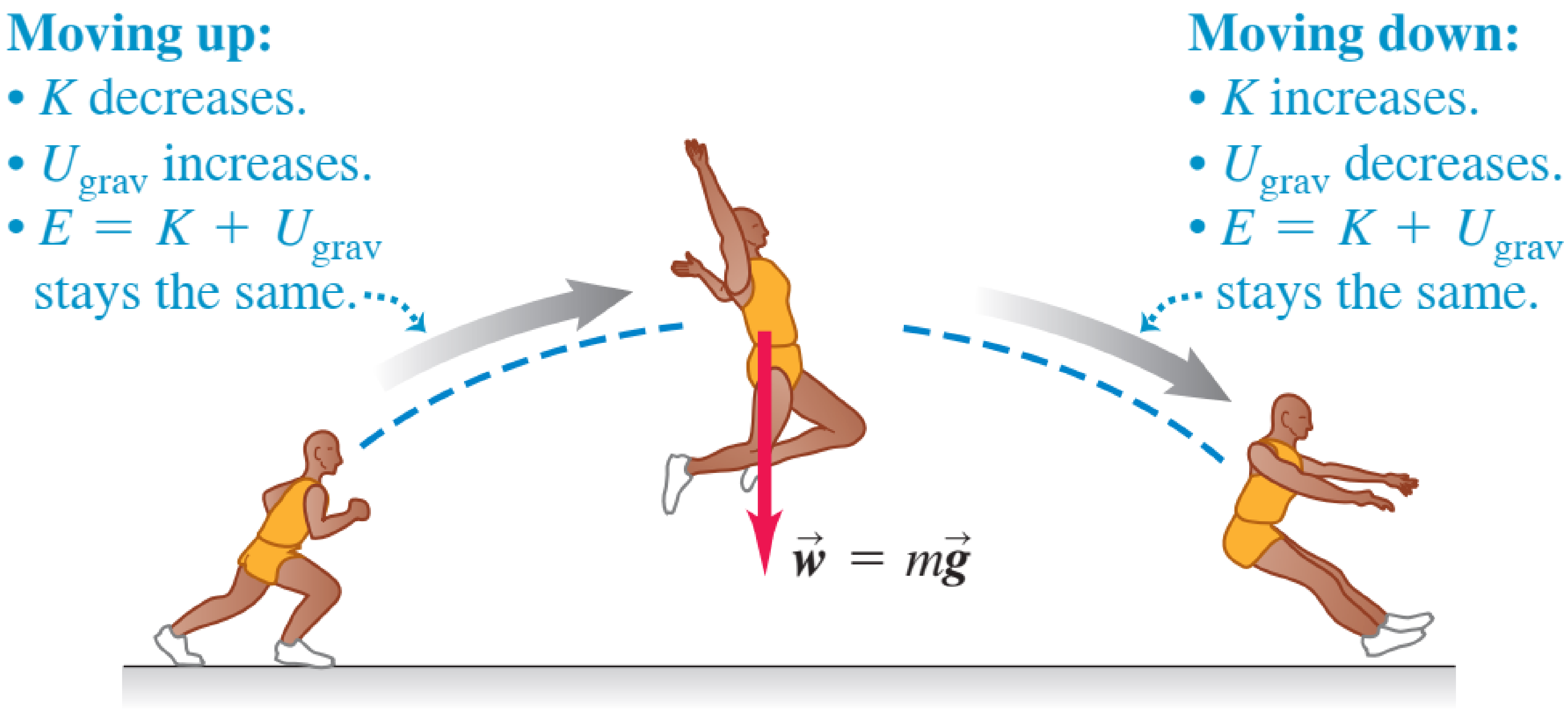
Final gravitational potential energy

$U_{\text{grav},2} = mgy_2$

定义**总机械能**为动能和势能的和：

$$E = K + U_{\text{grav}} = \text{constant} \qquad \text{(if only gravity does work)}$$

当这位运动员在空中时，只有重力对他起作用（忽略空气阻力）。总机械能E-动能和重力势能的总和-是守恒的。



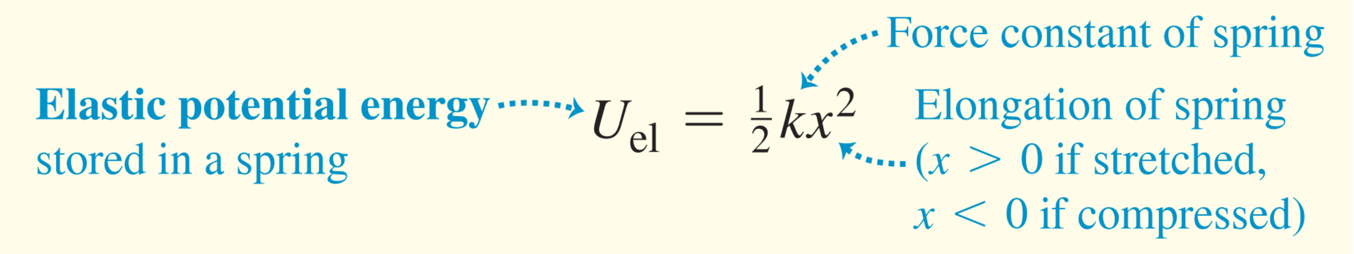
Moving up:

- K decreases.
- U_{grav} increases.
- $E = K + U_{\text{grav}}$ stays the same.

Moving down:

- K increases.
- U_{grav} decreases.
- $E = K + U_{\text{grav}}$ stays the same.

弹性势能：



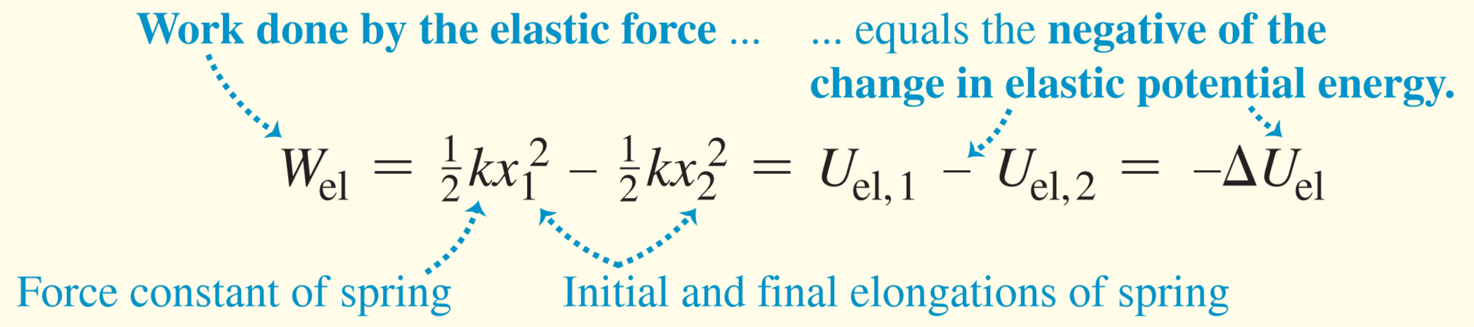
Elastic potential energy stored in a spring

$$U_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}kx^2$$

Force constant of spring

Elongation of spring ($x > 0$ if stretched, $x < 0$ if compressed)

弹力做的功，等于负的弹性势能变化：



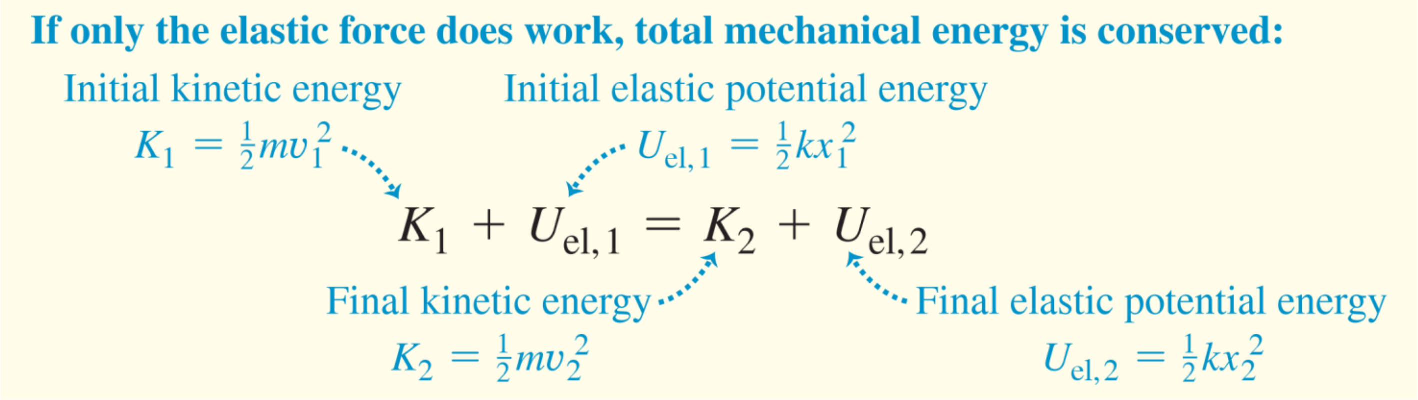
Work done by the elastic force ... ... equals the **negative of the change in elastic potential energy.**

$$W_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = U_{\mathrm{el},1} - U_{\mathrm{el},2} = -\Delta U_{\mathrm{el}}$$

Force constant of spring

Initial and final elongations of spring

如果只有弹性力做功，那么总机械能守恒：



If only the elastic force does work, total mechanical energy is conserved:

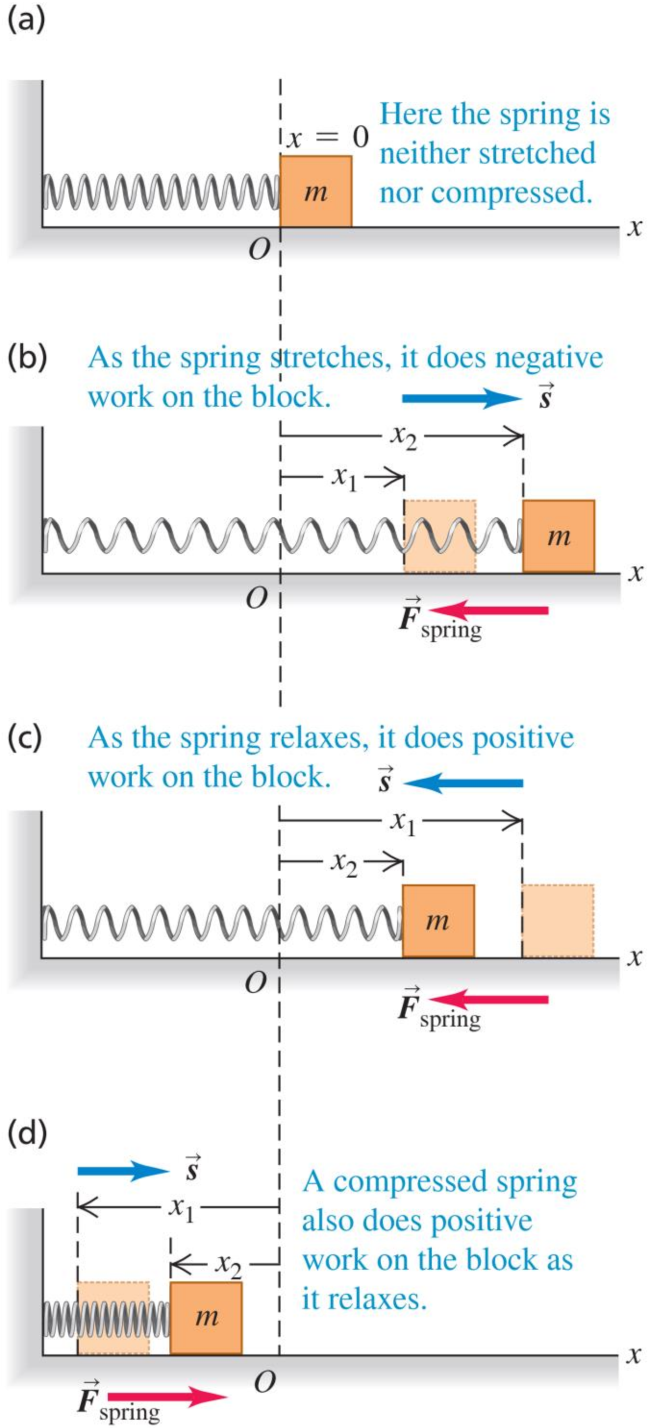
Initial kinetic energy $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$

Initial elastic potential energy $U_{\mathrm{el},1} = \frac{1}{2}kx_1^2$

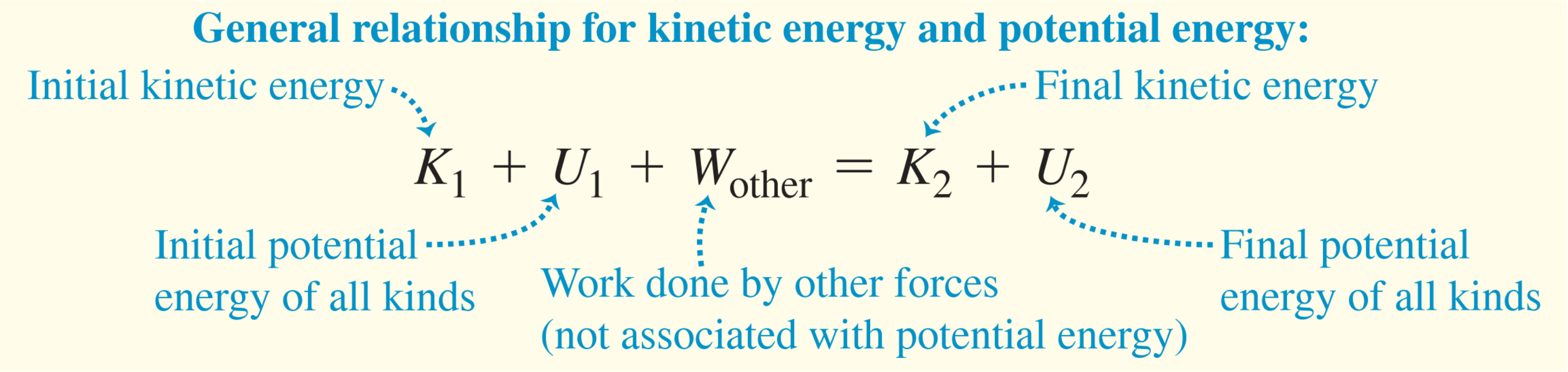
$$K_1 + U_{\mathrm{el},1} = K_2 + U_{\mathrm{el},2}$$

Final kinetic energy $K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$

Final elastic potential energy $U_{\mathrm{el},2} = \frac{1}{2}kx_2^2$



重力势能和弹性势能共同做功，总机械能也是守恒的：



General relationship for kinetic energy and potential energy:

Initial kinetic energy

Final kinetic energy

$$K_1 + U_1 + W_{\text{other}} = K_2 + U_2$$

Initial potential energy of all kinds

Work done by other forces (not associated with potential energy)

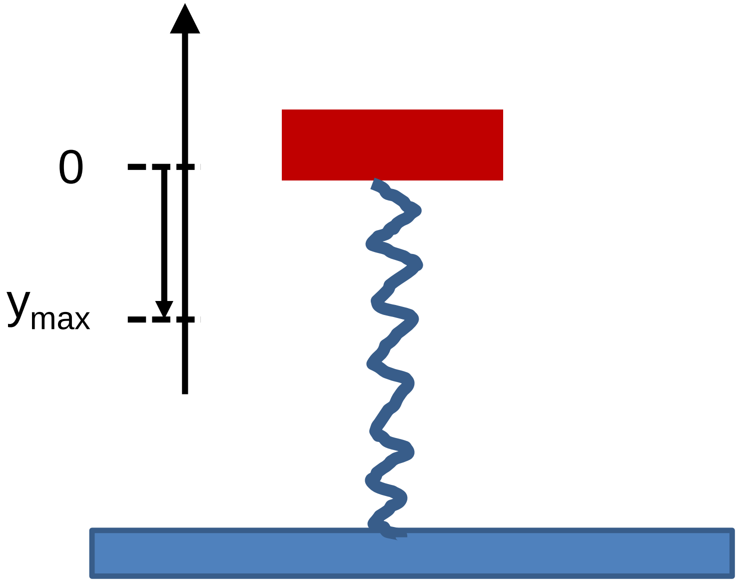
Final potential energy of all kinds

例题

一轻弹簧的劲度系数k=200 N/m，竖直静止在桌面上。今在其上端轻轻地放置一质量为m=2.0kg的砝码后松手。

（1）求此后砝码下降的最大距离y_{max}。

（2）求砝码下降$(1/2)y_{max}$时的速度v。



（1）：重力做功： mgy_{max}

弹簧势能： $\frac{1}{2}k(y_{max})^2$

机械能守恒： $mgy_{max}= \frac{1}{2}k(y_{max})^2$

（2）：机械能守恒： $\frac{1}{2}mgy_{max}= \frac{1}{2}k(y_{max}/2)^2+\frac{1}{2}mv^2$

势能的例子：

具体的积分运算下一节课介绍

重力做功： $$W_{ab}=mg(z_a-z_b)=-(E_{\mathrm{p}b}-E_{\mathrm{p}a})$$

万有引力做功： $$W_{ab}=GMm(\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_a})=-(E_{\mathrm{p}b}-E_{\mathrm{p}a})$$

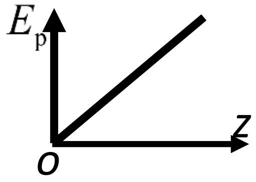
弹力做功： $$W_{ab}=\frac{1}{2}kx_a{}^2-\frac{1}{2}kx_b{}^2=-(E_{\mathrm{p}b}-E_{\mathrm{p}a})$$

恰当指定参考点的势能值：

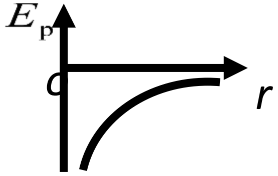
重力势能 $z_b=0$ $E_{\mathrm{p}b}=0$ $E_{\mathrm{p}}=mgz$

引力势能 $r_b=\infty$ $E_{\mathrm{p}b}=0$ $E_{\mathrm{p}}=-\dfrac{GMm}{r}$

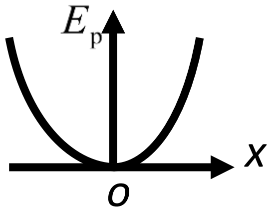
弹性势能 $x_b=0$ $E_{\mathrm{p}b}=0$ $E_{\mathrm{p}}=\dfrac{1}{2}kx^2$



重力势能曲线

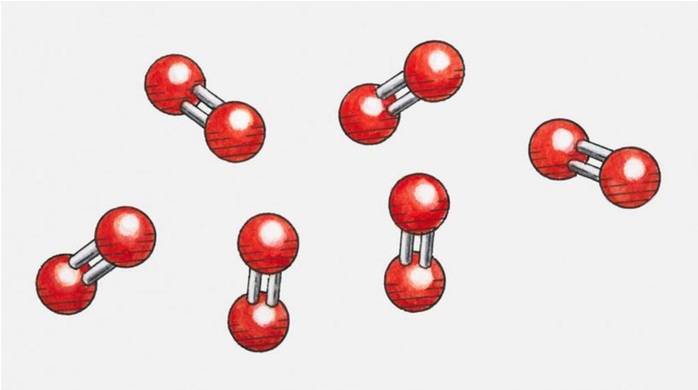


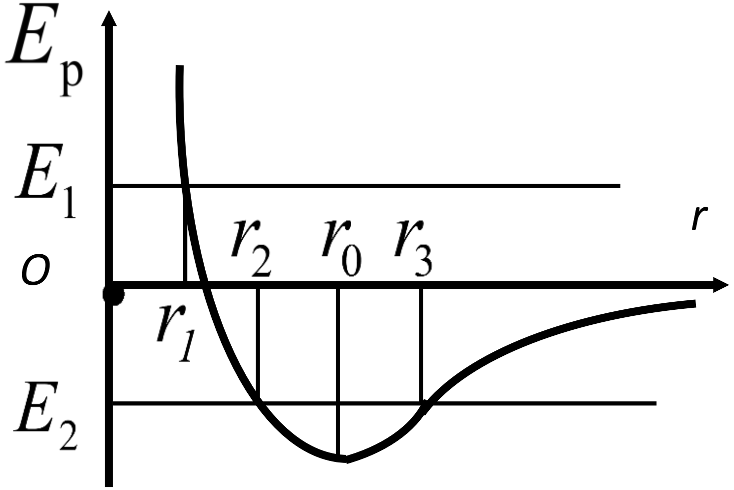
引力势能曲线



弹性势能曲线

*例：双原子分子的势能曲线





$$F(r_1) = -\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r}\right)_{r=r_1} > 0$$

$$F(r_0) = -\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r}\right)_{r=r_0} = 0$$

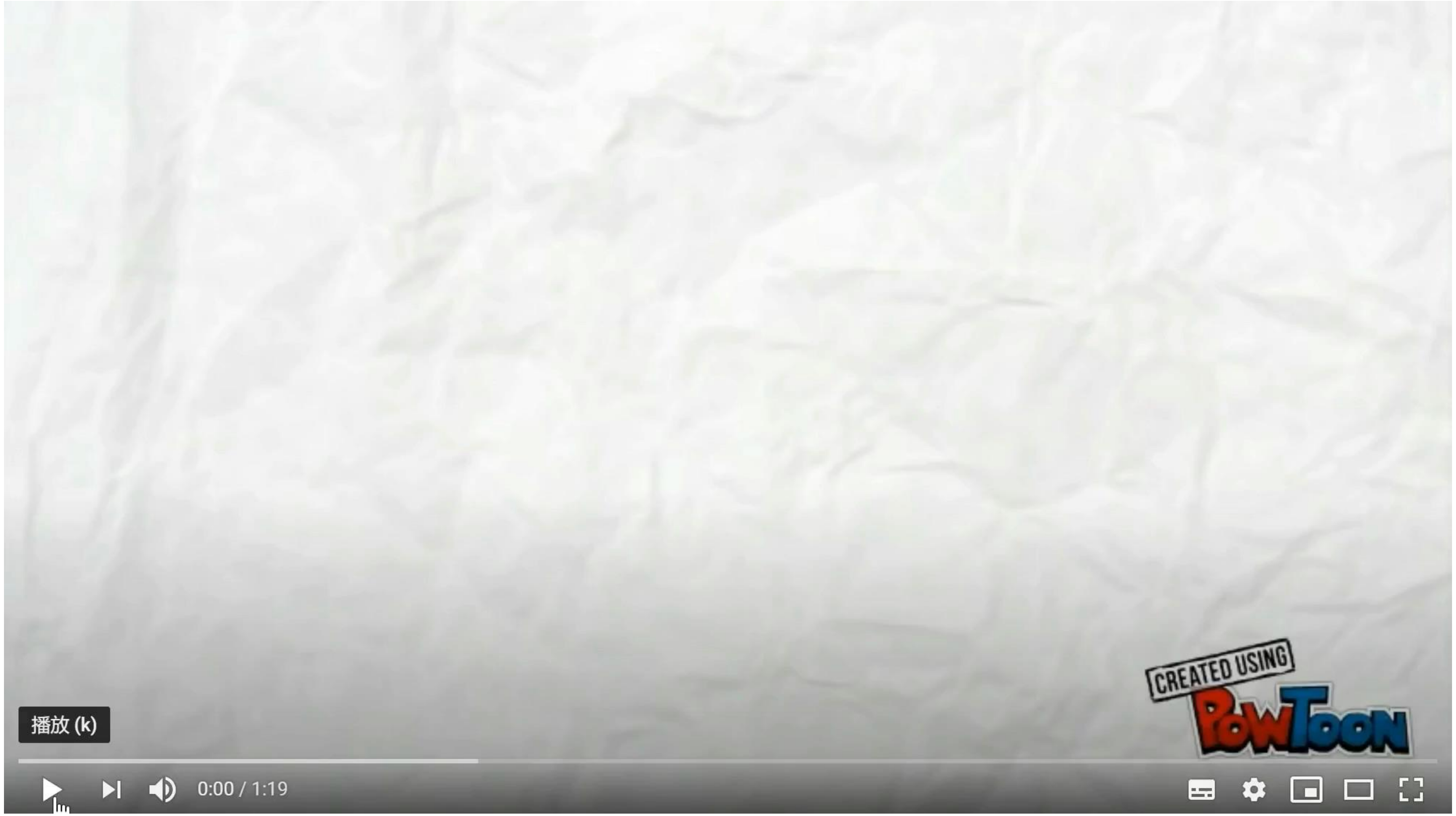
$$F(r_3) = -\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r}\right)_{r=r_3} < 0$$

兰纳–琼斯势（英語：**Lennard-Jones potential**），又称L–J势, 6–12势, 或12–6势, 是用来模拟两个电中性的分子或原子间相互作用势能的一个比较简单的数学模型。最早由数学家约翰·兰纳–琼斯于1924年提出。由于其解析形式简单而被广泛使用，特别是用来描述惰性气体分子间相互作用尤为精确。

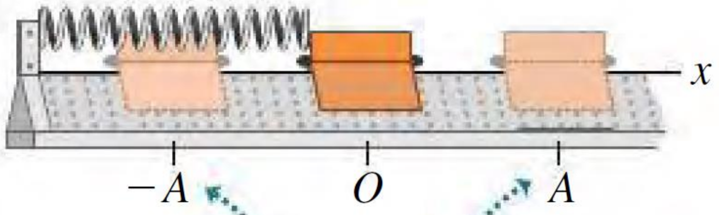
兰纳–琼斯势能以两体距离为唯一变量，包含两个参数。其形式为：

$$V(r) = 4\epsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right]$$

*化学势能（chemical potential）比较特殊，其由微观化学键决定，一般不算在宏观的机械能之内。



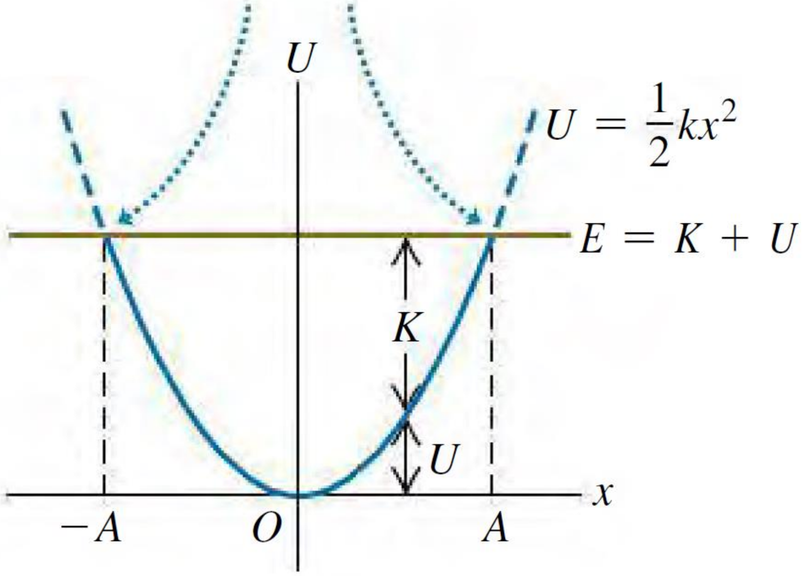
例：energy diagram



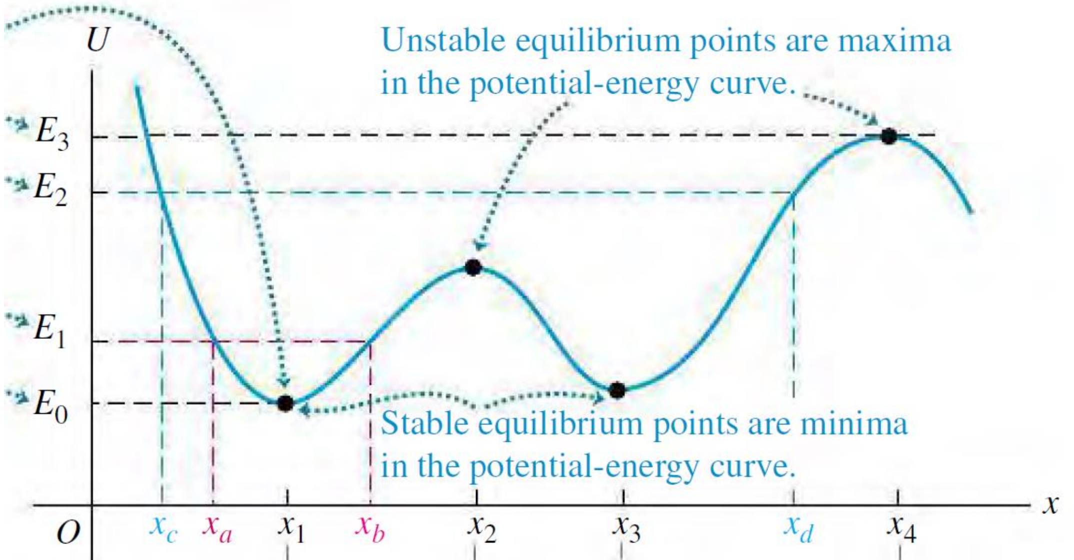
The limits of the glider’s motion are at $x = A$ and $x = -A$.

(b)

On the graph, the limits of motion are the points where the U curve intersects the horizontal line representing total mechanical energy E.



(a) A hypothetical potential-energy function $U(x)$



Unstable equilibrium points are maxima in the potential-energy curve.

Stable equilibrium points are minima in the potential-energy curve.

(b) The corresponding x-component of force $F_x(x) = -dU(x)/dx$