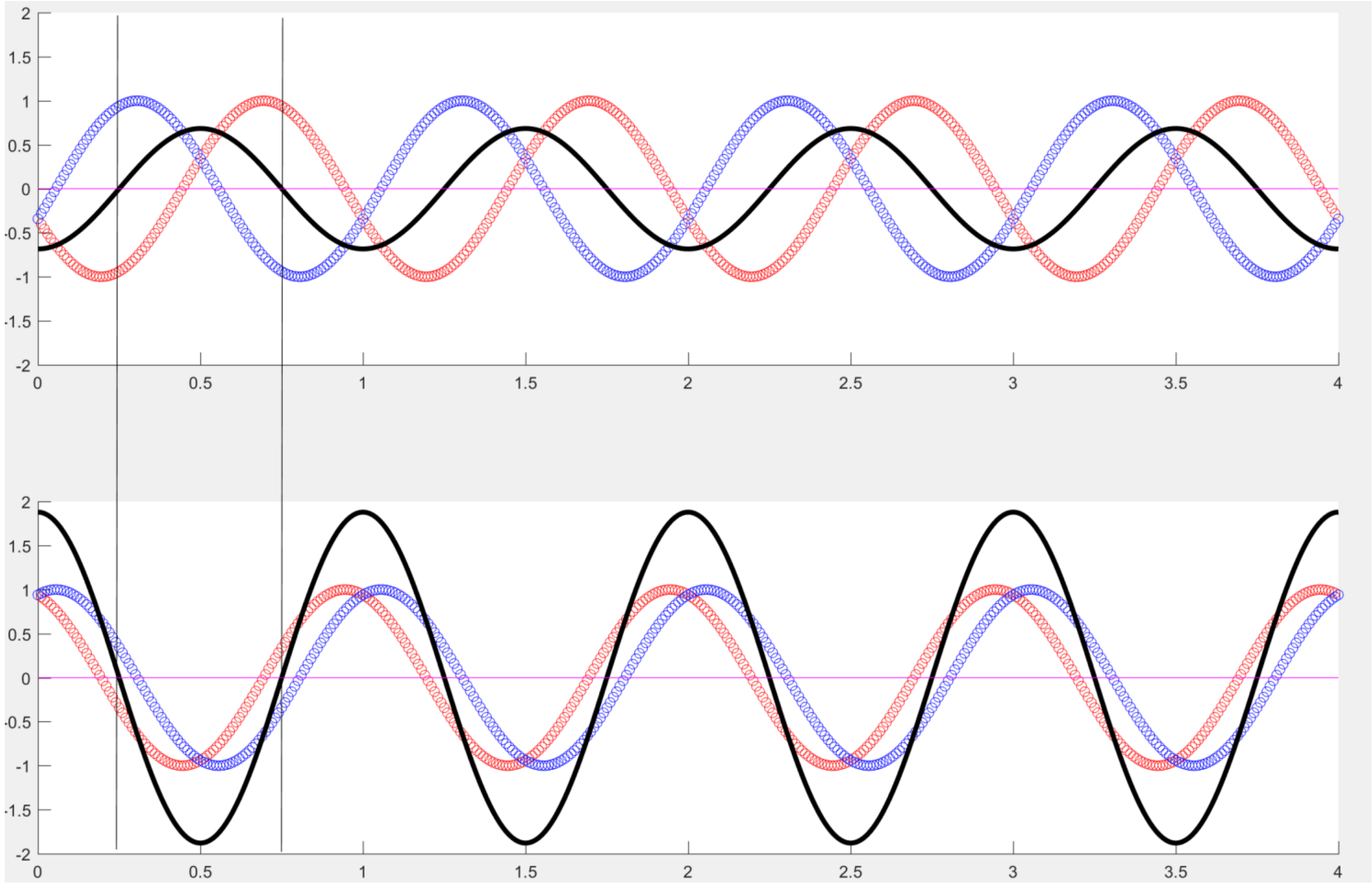
驻波的简正模式(normal mode)

两端固定的张紧弦中产生驻波



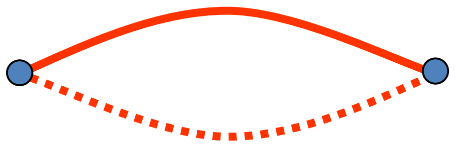
驻波的简正模式(normal mode)

两端固定的张紧弦中产生驻波，因此波长只能取分立的值。
因此对角频率和波数也有相应分立值要求

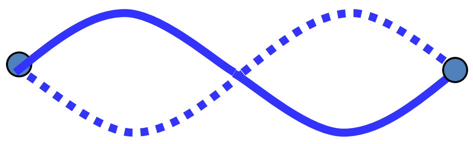
$$n \cdot \frac{\lambda}{2} = L \qquad n = 1,2,3\cdots$$

$$\boxed{f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nu}{2L} \qquad n = 1,2,3\cdots}$$

*u*为波动传播的速度，
*f*称为简正频率



$n = 1$



$n = 2$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{L} \qquad n = 1,2,3\cdots \qquad \omega = 2\pi f = \frac{n\pi v}{L} \qquad n = 1,2,3\cdots$$

对应的驻波称为弦的简正模或固有振动

驻波的基本频率

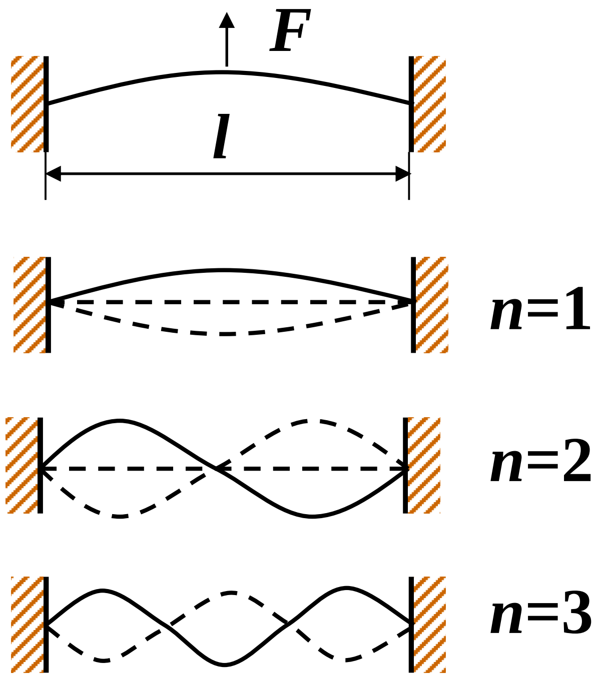
Standing Waves and String Instruments

From Eq. (15.32), the fundamental frequency of a vibrating string is $f_1 = v/2L$. The speed v of waves on the string is determined by Eq. (15.14), $v = \sqrt{F/\mu}$. Combining these equations, we find

$$\underbrace{f_1}_{\text{Fundamental frequency, string fixed at both ends}} = \frac{1}{\underbrace{2L}_{\text{Length of string}}}\sqrt{\frac{\overbrace{F}^{\text{Tension in string}}}{\underbrace{\mu}_{\text{Mass per unit length}}}} \tag{15.35}$$

实例：乐器的结构与音色

对于两端固定的弦，最低频率叫做**基频**，而其它的频率叫做**泛音**。一种乐器所奏出的特定**音调**(基频)的**音色**，决定于存在的泛音的数目和这些泛音各自的强度。



波长 $\lambda_n = \dfrac{2l}{n}$

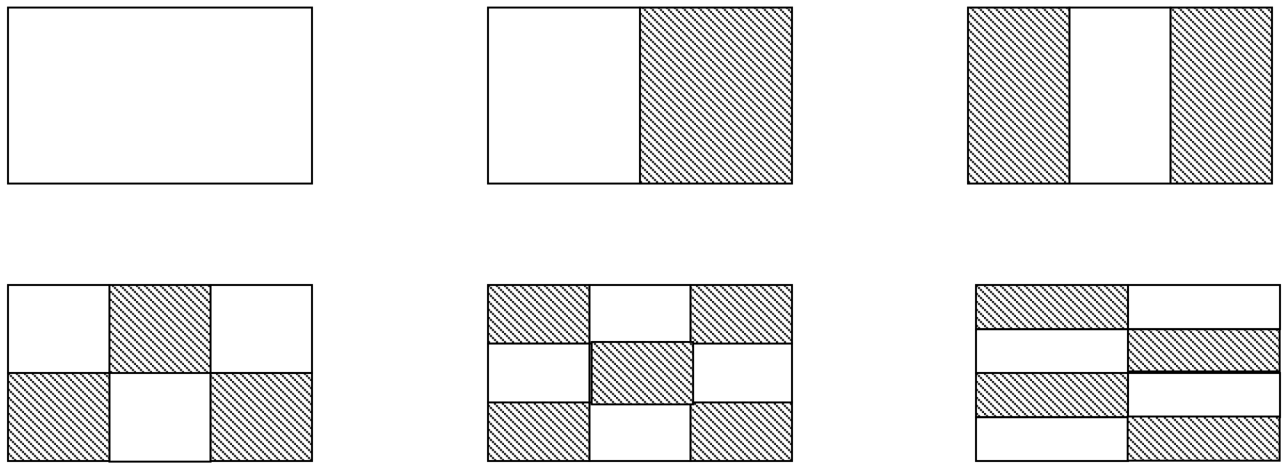
波频 $f_n = \dfrac{nv}{2}$

其中 $n = 1,2,3,\cdots$

系统究竟按那种模式振动，取决于初始条件,一般是各种简正模式的叠加.

*二维驻波

板和膜的振动，波在边界往复的反射形成驻波.



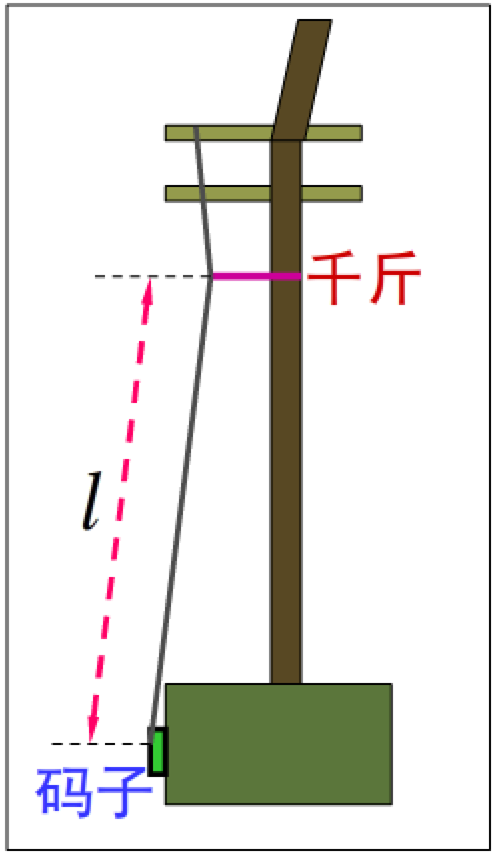
矩形膜上的二维驻波，阴影部分和明亮部分反相，两者的交线为波节.

例题：钢琴最高音的频率是最低音的150倍。如果最高音的弦长5.0cm，而最低音的弦线密度与最高音的一样，且弦上的张力也一样，请问最低音的弦长应为多少？

解：因为两根弦的线密度相同，张力也相同，所以在弦中传播的波速也是一样的，所以频率f仅与弦的长度L有关，有 $\frac{L_\mathrm{L}}{L_\mathrm{H}}=\frac{f_\mathrm{H}}{f_\mathrm{L}}$ ，下标L和H分别表示最低和最高频率。

因此，$L_\mathrm{L}=L_\mathrm{H}\times\frac{f_\mathrm{H}}{f_\mathrm{L}}=5.0\times150=750(\mathrm{cm})$。

如图二胡弦长$l=0.3\,\mathrm{m}$，张力$T=9.4\mathrm{N}$．密度$\rho=3.8\times10^{-4}\,\mathrm{kg/m}$．求弦所发的声音的基频和谐频.



解：弦两端为固定点，是波节.

$$l=n\frac{\lambda}{2}\quad n=1,2,\cdots$$

频率 $f=\dfrac{v}{\lambda}=\dfrac{nv}{2l}$　　波速 $v=\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$

基频　$n=1$　$f_1=\dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}=262\ \mathrm{Hz}$

谐频　$n>1$　$f_n=\dfrac{n}{2l}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$

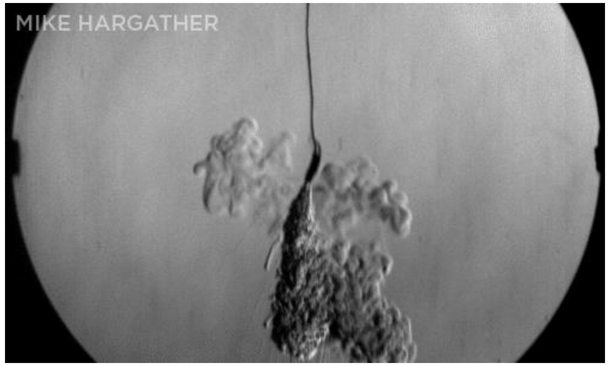
普通物理I PHYS1181

第15讲

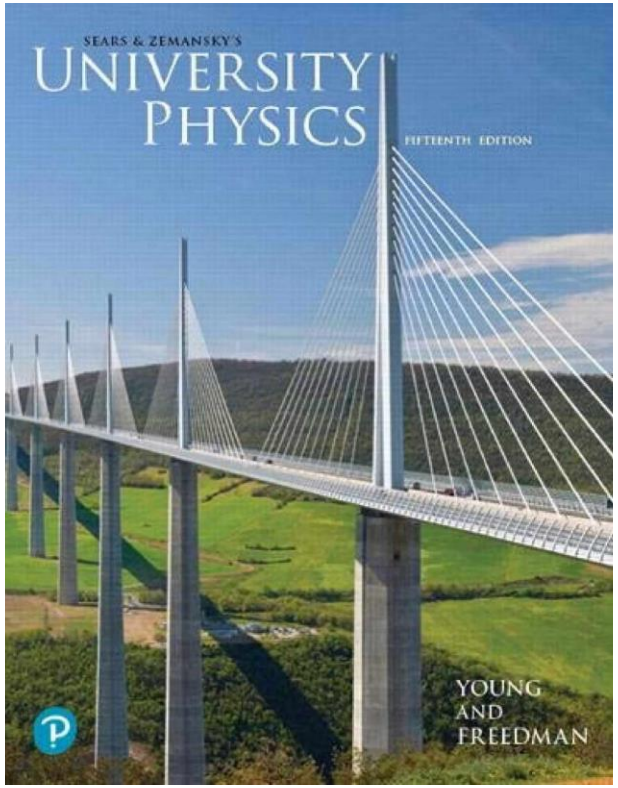
声波和听力

Sound and hearing

拍手时的声波



鞭炮燃爆的声波

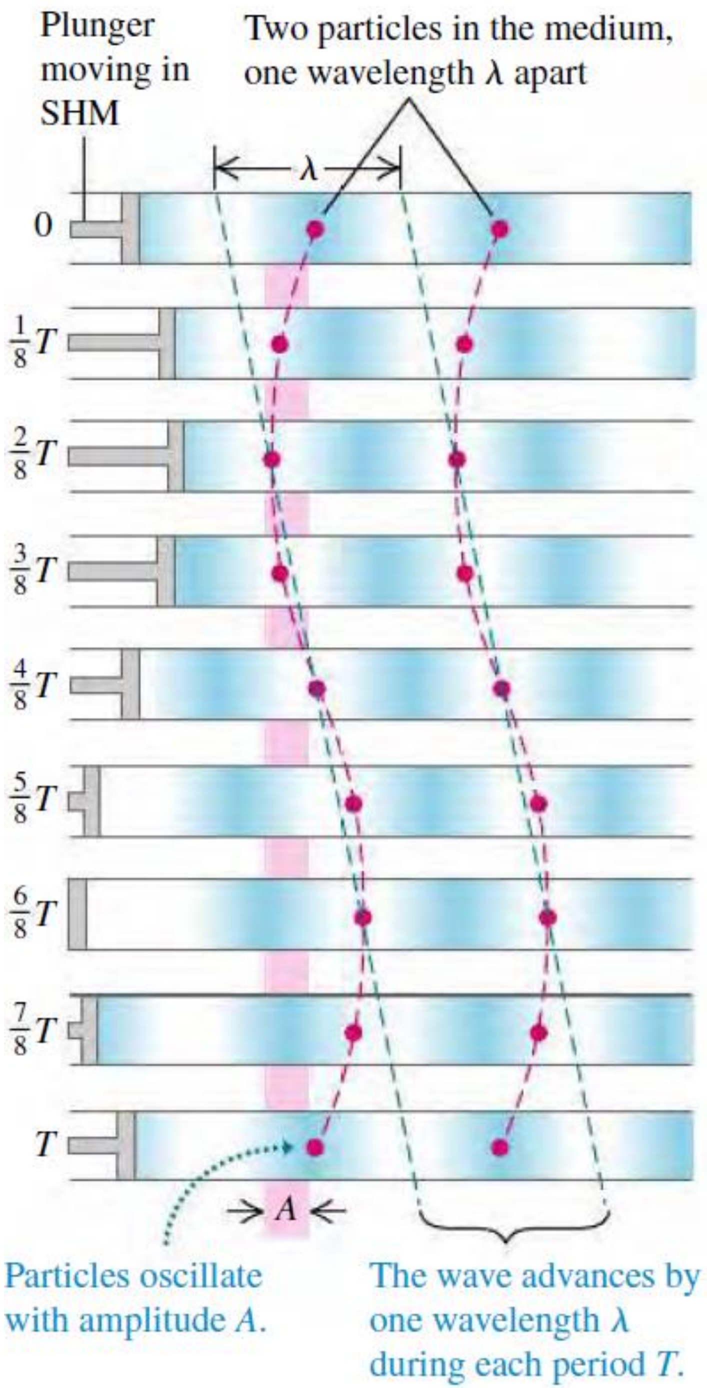


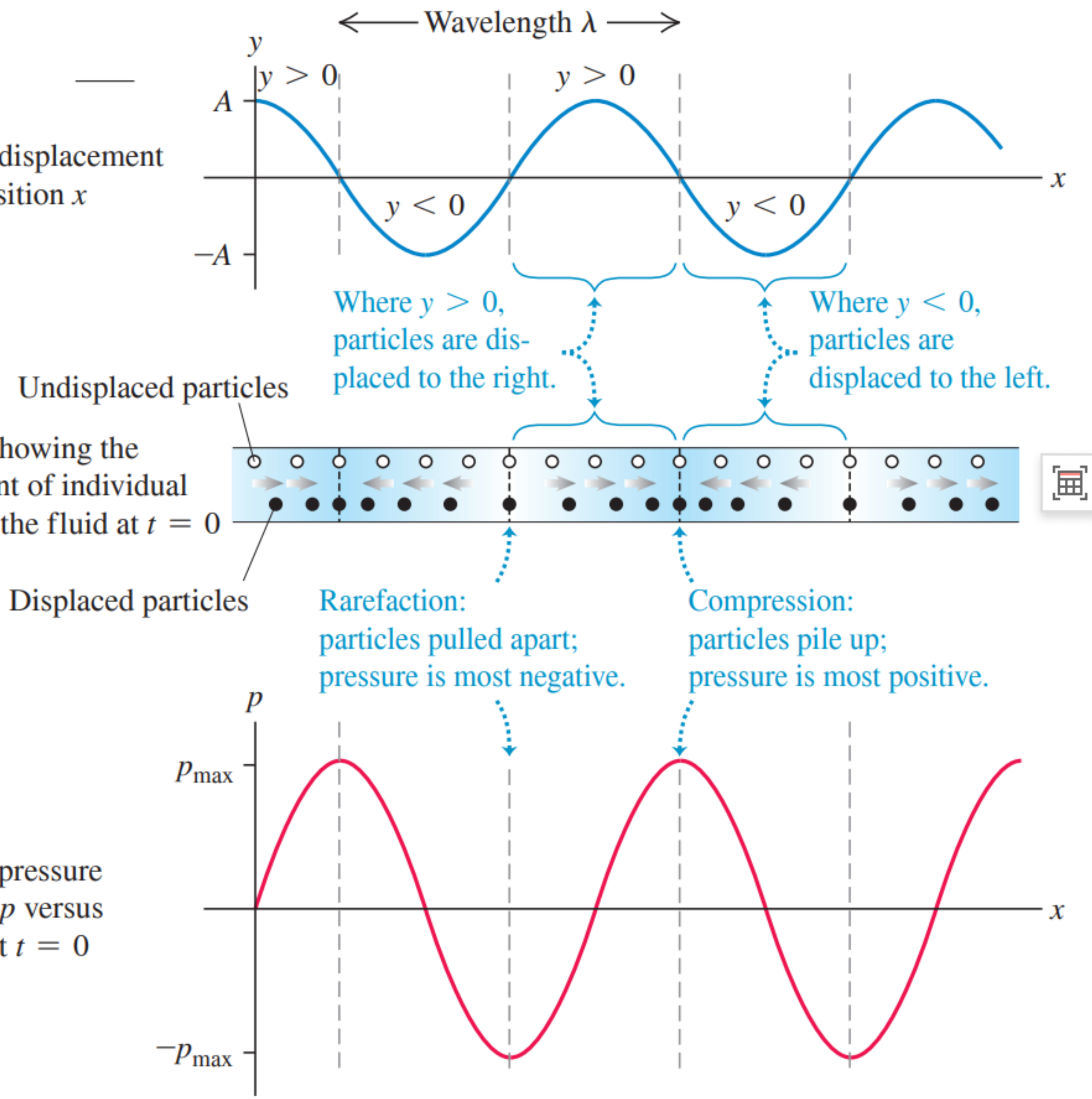
声波的波动方程：

$$y=A\cos(kx-\omega t)$$

声波： 纵波 – 传播方向和振荡方向同向。

考虑对象： y (x, t) – 任意位置小元相对于平衡位置的位移， 方向$\hat{x}$



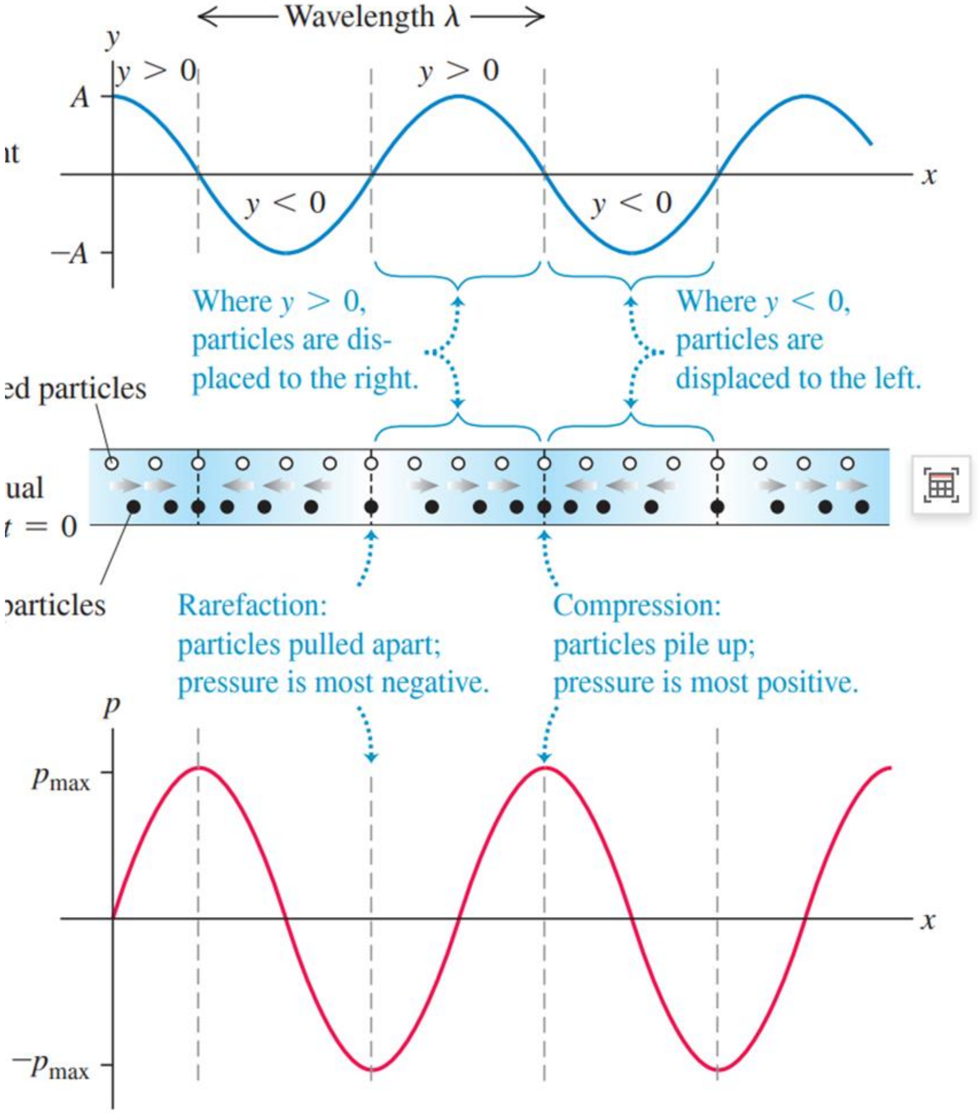


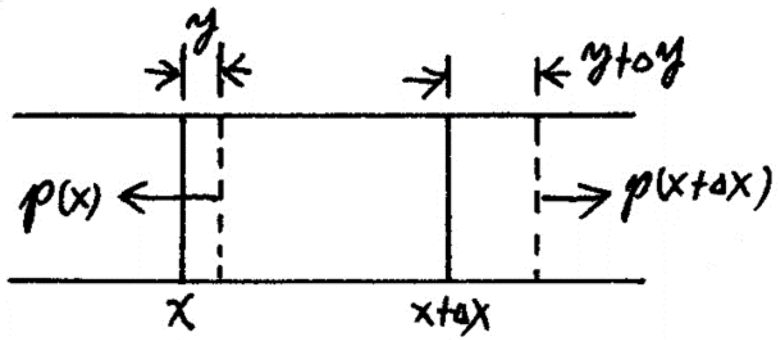
(a) A graph of displacement y versus position x at $t = 0$

(b) A cartoon showing the displacement of individual particles in the fluid at $t = 0$

(c) A graph of pressure fluctuation p versus position x at $t = 0$

弹性细棒中纵波的波动方程和波速





设棒的横截面积为S，材料的杨氏模量为Y。
则这小段棒受到的合力为

$$F(x+\Delta x)-F(x)=S[p(x+\Delta x)-p(x)]$$

$$=S\left[Y\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}-Y\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x}\right]=SY\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x$$

小段棒的质量为$\Delta m=\rho S\Delta x$

由牛顿第二定律 $$SY\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x=(\rho S\Delta x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

得 $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{Y}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

这是一维波动方程，声速为 $$v=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

其中 ρ 为棒的体密度。

对比横波的方程： $$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{F}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}\quad\boxed{v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

变量y在不同方向

纵波的能量和能流

在弹性介质中，介质质元不仅因有振动速度而具有动能，而且因发生形变而具有弹性势能，所以振动的传播必然伴随能量的传递。

一、波的能量

设波在体密度为ρ 的弹性介质中传播, 在波线上坐标**x** 处取一个体积元**dV**, 在时刻**t** 该体积元各量如下:

振动位移：$y = A\cos\omega(t - \frac{x}{v})$

振动速度：$\upsilon_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\sin\omega(t - \frac{x}{v})$

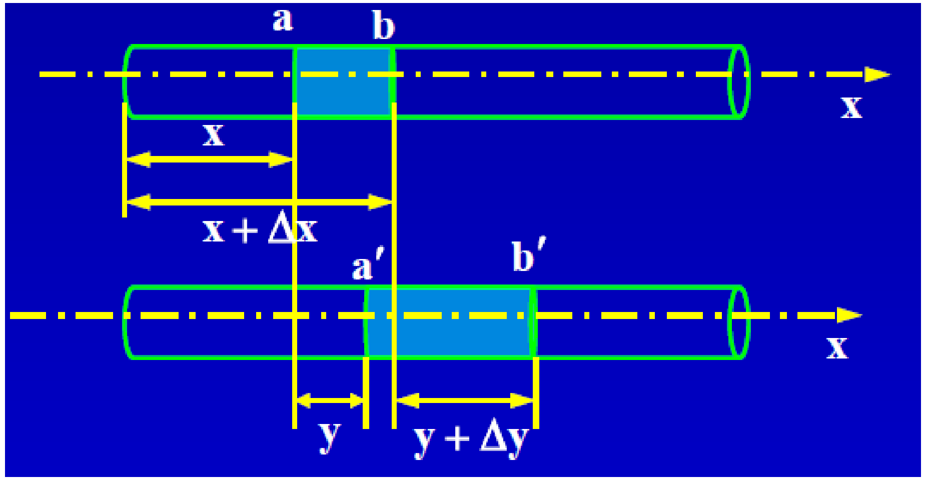
振动动能：$\mathrm{d}E_k = \frac{1}{2}(\mathrm{d}m)\upsilon^2 = \frac{1}{2}\rho \mathrm{d}VA^2\omega^2\sin^2\omega(t - \frac{x}{v})$

关于体积元的弹性势能：

以金属棒中传播纵波为例.在波线上任取一体积为**ΔV=SΔx**，质量为**Δm=ρSΔx**的体积元.利用金属棒的杨氏弹性模量的定义和虎克定律

$$\frac{F}{S} = T = Y\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$k = \frac{SY}{\Delta x}$$



$$\therefore dE_p = \frac{1}{2}k(\Delta y)^2 = \frac{1}{2}SY\Delta x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

因 $\Delta V = S\Delta x$，$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$， $\frac{\partial y}{\partial x} = A\frac{\omega}{v}\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$

$$\therefore \mathrm{d}E_p = \frac{1}{2}\rho v^2 \mathrm{d}VA^2 \frac{\omega^2}{v^2}\sin^2\omega(t-\frac{x}{v}) = \frac{1}{2}\rho \mathrm{d}VA^2\omega^2\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)$$

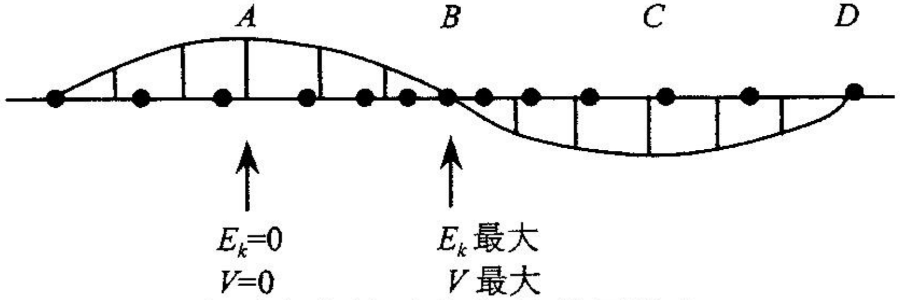
$$\mathrm{d}E_k = \mathrm{d}E_p = \frac{1}{2}\rho \mathrm{d}VA^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{v})$$

体积元总能量：$\mathrm{d}E = \mathrm{d}E_k + \mathrm{d}E_p = \rho \mathrm{d}VA^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{v})$

讨论

① E_k=E_p 随时间周期性变化，周期为波动周期的一半。

② 振动中动能与势能相位差为$\pi/2$，波动中动能和势能同相；



波到达之处动能与势能同位相

③ 波动能量随时间变化；振动系统的机械能保持恒定。

二、能量密度

①能量密度: 单位体积介质中的波动能量

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{dV}} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \omega (t - \frac{x}{v})$$

波的能量密度与总能量dE均随时间作周期性变化，且同相.

② 平均能量密度

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon dt == \frac{1}{T}\int_0^T \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \omega (t - \frac{x}{v}) \mathrm{d}t$$

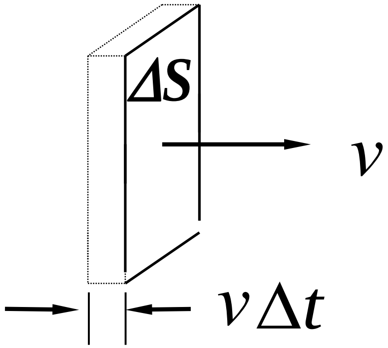
$$= \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2$$

波的平均能量密度与振幅的平方成正比，与频率的平方成正比。

三、能流密度(波的强度)

平均能流密度：单位时间通过垂直于波的传播方向上单位面积的平均能量.

$$I=\frac{v\Delta t\Delta S}{\Delta t\Delta S}\bar{\varepsilon}=v\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 v$$



平均能流密度是矢量, 方向沿波的传播方向.

$$\vec{I}=\bar{\varepsilon}\vec{v}=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\vec{v}$$

简称**能流密度，** 单位: W.m^{-2}

电磁学和电动力学中称为坡印廷矢量.

声学中称为“声强”

在声学中测定声强级(***I.L***)的特定单位为“贝尔”，更常用的单位是“分贝(**dB**)”，它与贝尔的关系为：**10dB=1**贝尔。

任意声音的强度级用它的“能流密度”按以下方式定义：

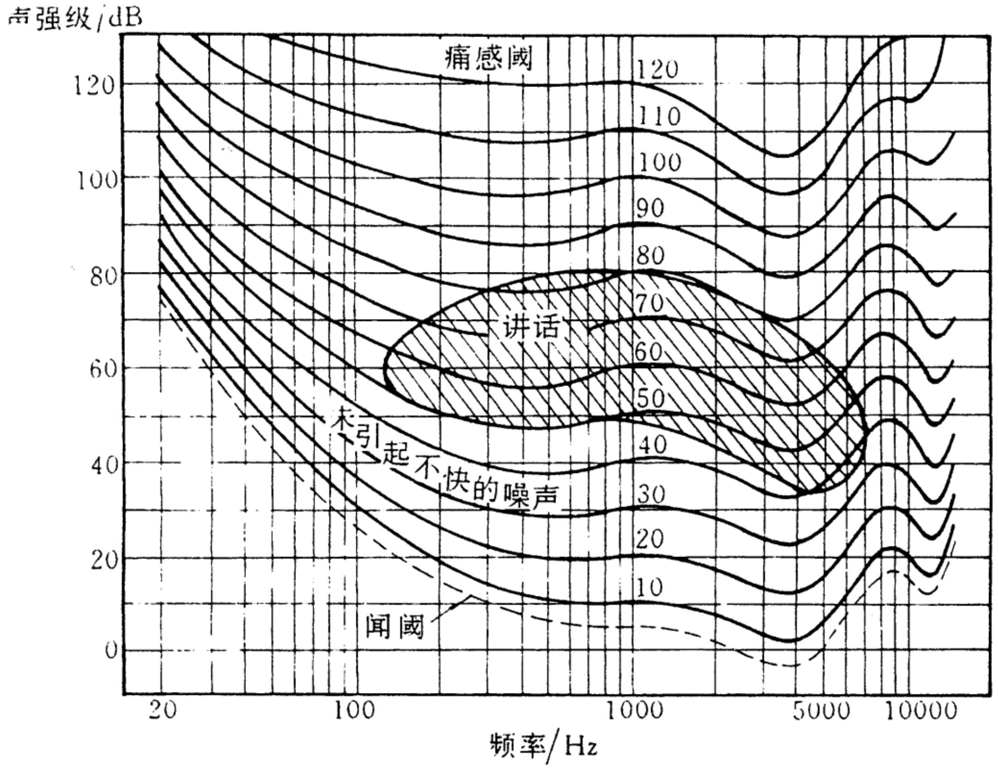
$$I.L = 10\lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

其中$\boldsymbol{I_0}$为参考强度，常取人类可听到的最小平均强度(临界听觉)，$\boldsymbol{I_0=1.0\times10^{-12}W\cdot m^{-2}}$。

普通声音的强度等级

声　源	P/P_{ref}	I/dB	说　明
	$10^0=1$	0	听觉阈值
正常呼吸	10^1	20	很难听到
图书馆	10^2	40	安静
会话	10^3	60	
工厂	10^4	80	
地铁列车	10^5	100	对听觉有危险
摇滚音乐会	10^6	120	痛阈
喷气式飞机起飞	10^7	140	
火箭发射	10^9	180	

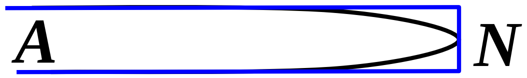
人耳听到的声音也有一定的频率范围(20Hz～20000Hz)，而且对所有能听到的频率也不是同样敏感的，不同频率的声音需要不同的强度听起来才具有同样的音量感觉。



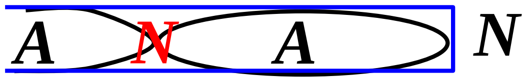
乐器实例：一端封闭的管风琴中空气柱的振动

设管一端封闭，另一端敞开，开端形成波腹，闭端形成波节.固有振动的波长和频率为

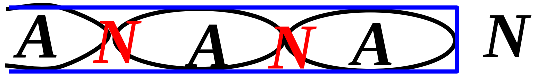
$$\lambda_n = \frac{4l}{n} \qquad f_n = \frac{n}{4l}v \qquad n = 1,3,5,\cdots$$



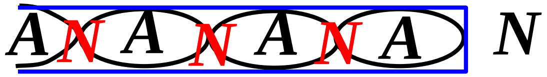
$$\lambda_1 = 4l \qquad f_1 = \frac{1}{4l}v$$



$$\lambda_3 = \frac{4l}{3} \qquad f_3 = \frac{3}{4l}v$$



$$\lambda_5 = \frac{4l}{5} \qquad f_5 = \frac{5}{4l}v$$



$$\lambda_7 = \frac{4l}{7} \qquad f_7 = \frac{7}{4l}v$$

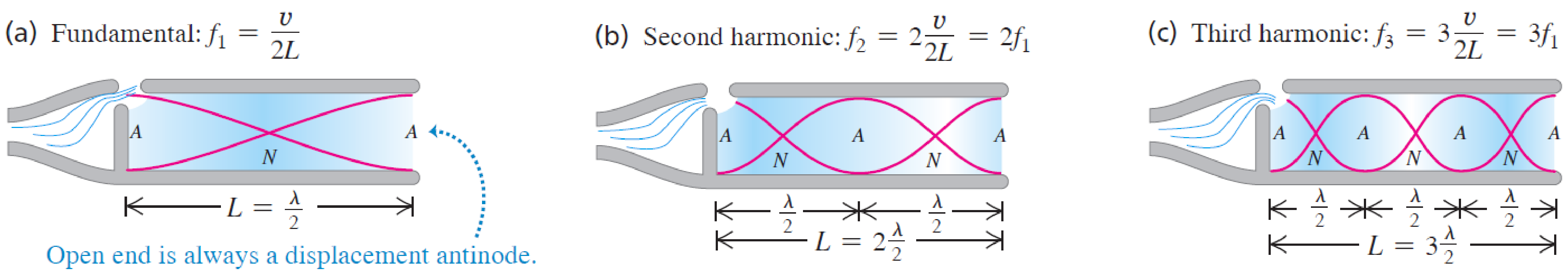
乐器实例：两端开放的管风琴中空气柱的振动

设管两端均开放，开端形成波腹，基本波长和基本频率为：

$$\lambda_1=2L \qquad f_1=\frac{v}{2L}$$

n次谐频的波长和频率为：

$$\lambda_n=2L/n \qquad f_n=\frac{nv}{2L}$$



多普勒效应

如果波源与观察者之间有相对运动，则观察者接受到的波频率不同于波源的频率，这种现象称为多普勒效应。对弹性波来说，所谓波源和观察者的运动或静止，都是相对于在其中传播的连续介质而言的。

假定波源、观察者的运动发生在二者的连线上。设波源的频率为f，波长为λ，在介质中的传播速度为v.若波源和观察者相对于介质静止时，测得的频率则为

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda}$$

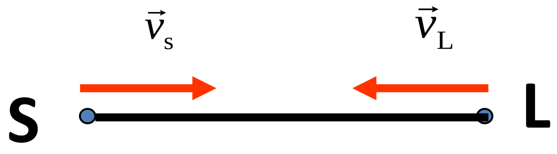
观察者观测到的波速v'与观测到的波长λ'之比称为观测频率f'

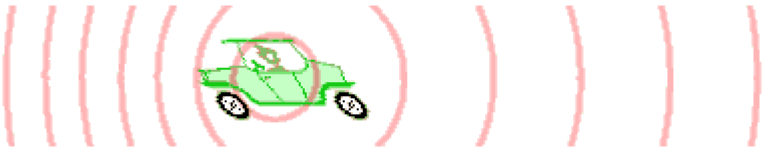
$$f' = \frac{v'}{\lambda'}$$

多普勒效应

当波源S和接收器L有相对运动时，接收器所测得的频率f_L不等于波源振动频率 f_s 的现象。

机械波的多普勒效应





- 参考系：媒质
- 符号规定：　S和L 相互靠近时v_s, v_l为正
- f_S：波源振动频率，f: 波的频率，f_L：接收频率

1. 波源和接收器都静止 (v_S=0，v_L=0)

$$f_L = f = f_s$$

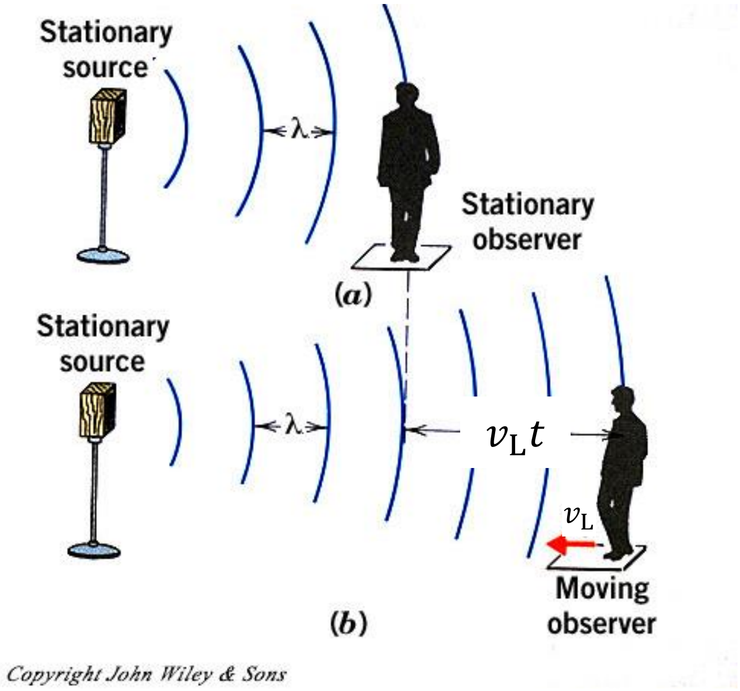
多普勒效应

2. 波源静止，接收器运动(v_s=0)

相当于单位时间内波通过接收器的总距离为 $v + v_L$

单位时间接收到完整波的个数

$$\boxed{f_L = \frac{v + v_L}{\lambda} = \frac{v + v_L}{v} f_s}$$



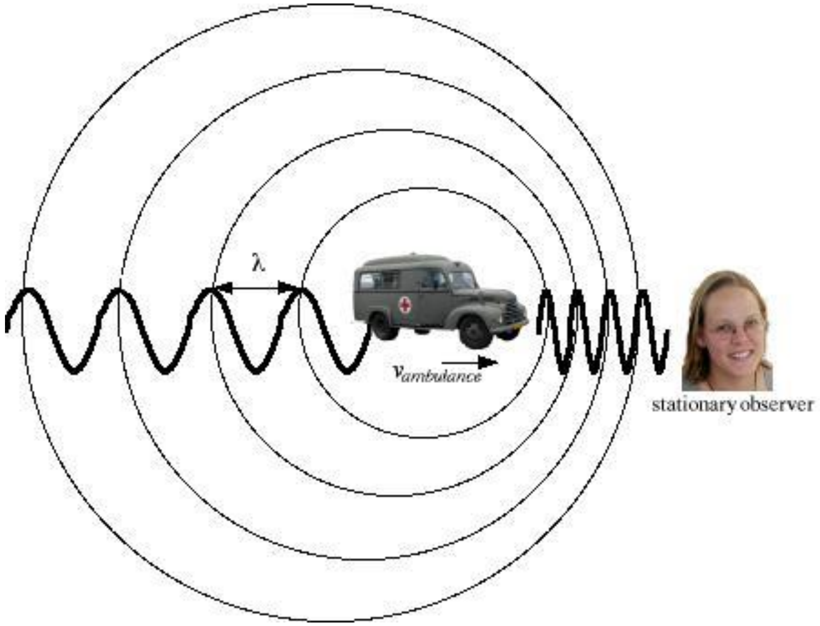
观察者相对波源相向运动，频率增大；观察者相对波源远离运动，频率减小。

多普勒效应

3. 波源运动，接收器静止(v_L=0) → 不等价于接收器向波源运动！介质！

非自由传播，连续受迫振动，波长变化：$\lambda = \frac{v}{f_s} - \frac{v_s}{f_s}$

$$\boxed{f_L = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{v - v_s} f_s}$$



波源相对观察者相向运动，频率增大；波源相对观察者远离运动，频率减小。

机械波的多普勒效应

4. 波源和接收器皆运动

$$f_L = \frac{v + v_L}{\lambda'}$$

$$\lambda' = \frac{v}{f_S} - \frac{v_S}{f_S}$$

$$\boxed{f_L = \frac{v + v_L}{v - v_s} f_s}$$

➤**若S和 L 的运动不在二者连线上**

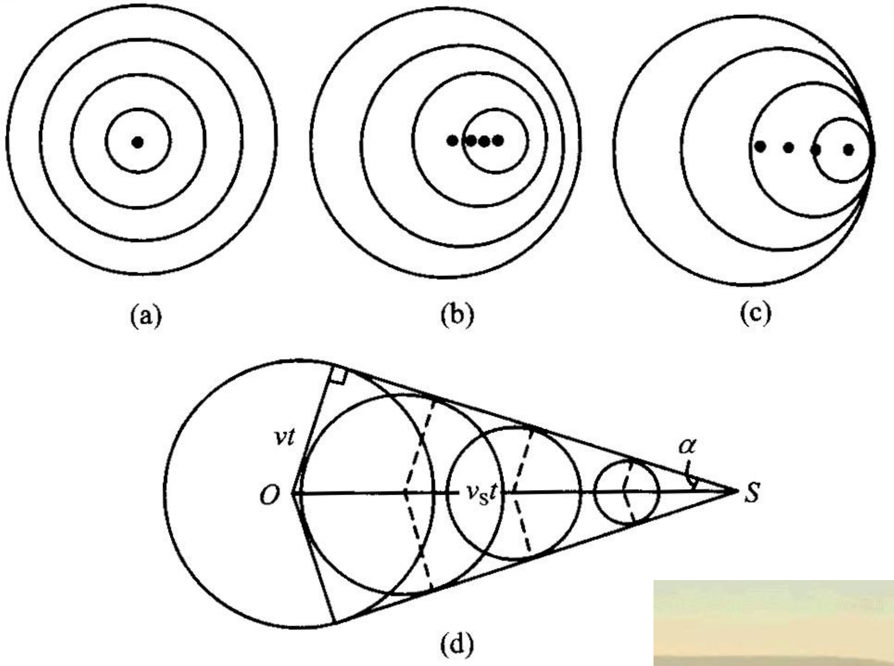
$$f_L = \frac{v + v_L \cos\theta_L}{v - v_s \cos\theta_s} f_s$$

➤**有纵向多普勒效应；** 无横向多普勒效应(不考虑相对论效应)

若波源速度超过波速$v_s>v$

上述计算结果将没有意义，多普勒不再适用。这时波源将位于波前的前方,各波前的切面形成一个圆锥面，称为马赫锥,其顶角满足

$$\sin\alpha=\frac{v}{v_s}$$

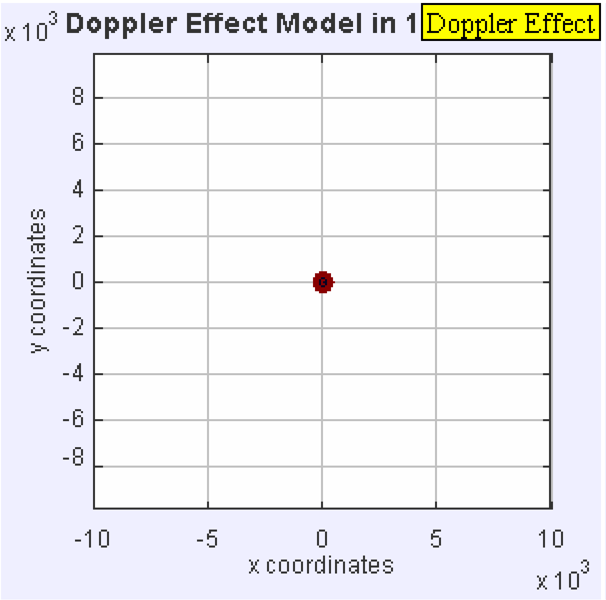


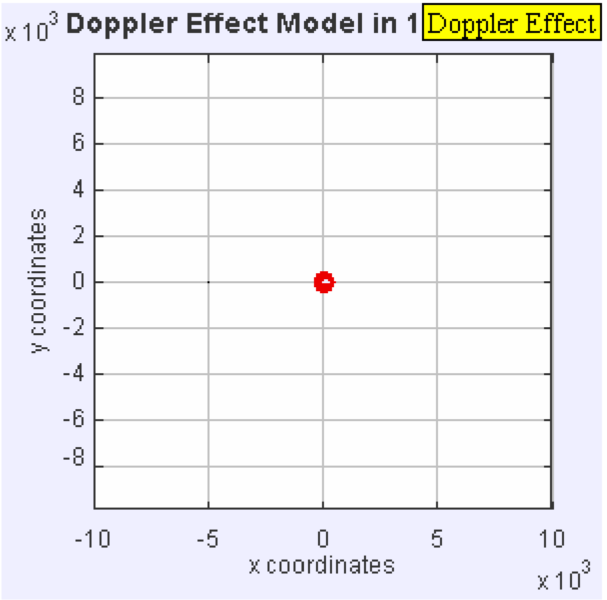
马赫锥

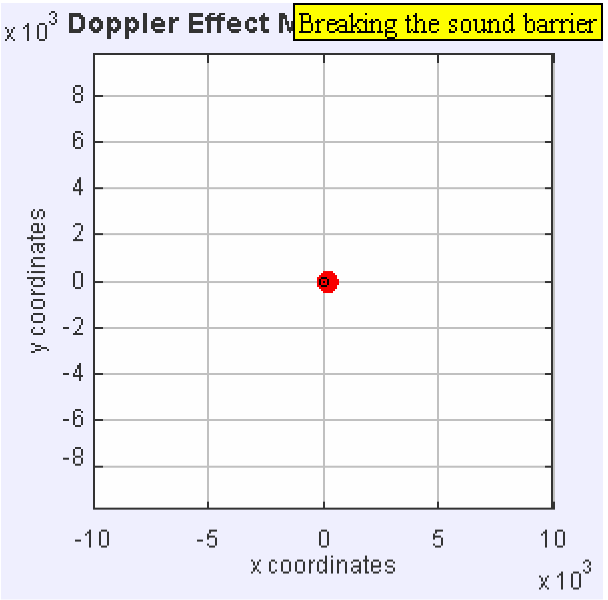
水上快艇造成的弓形水波

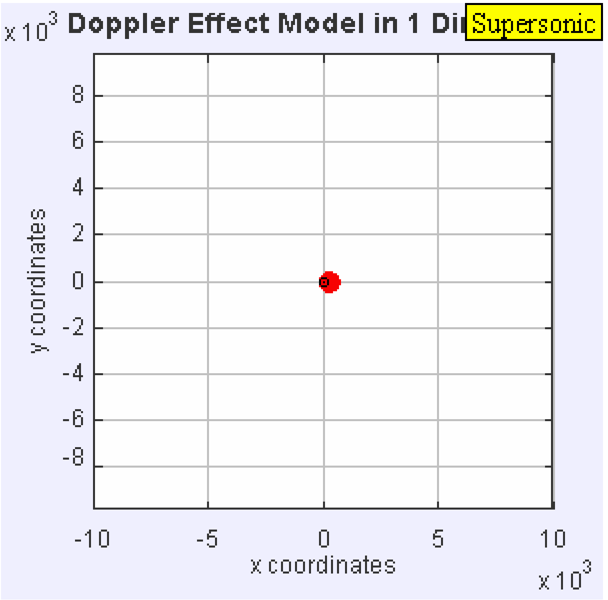
子弹在空气中高速运动造成的“冲击波”

地震中的“超剪切波”（破裂速度超过横波速度









波源相对于介质静止

多普勒效应

“音障”

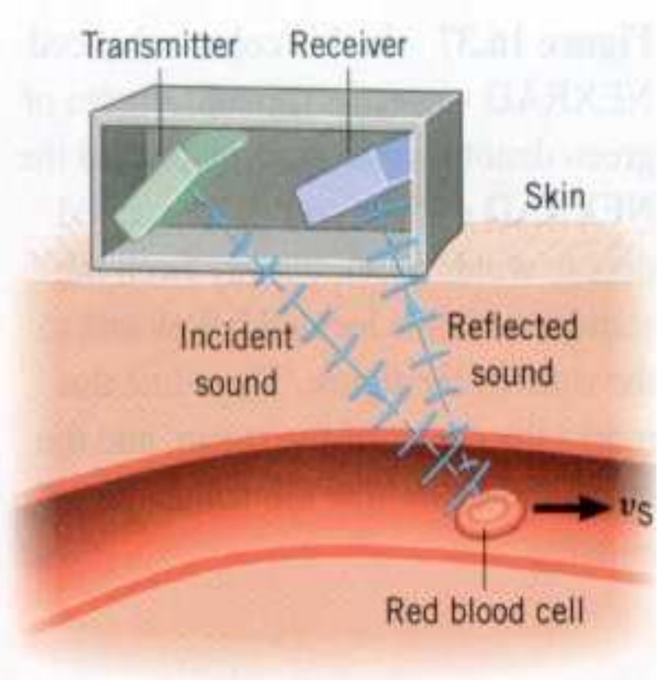
激波
（Shock Wave)

波源的速度超过了
介质中的波速，
超音速飞机

多普勒效应的应用

利用声波的多普勒效应可以测定流体的流速，振动体的振动和潜艇的速度，还可以用来报警和监测车速。在医学上，利用超声波的多普勒效应对心脏跳动情况进行诊断，如做超声心动、多普勒血流仪等.

宇宙膨胀学说



例题：利用多普勒效应监测汽车行驶的速度．一固定波源发出频率为100kHz的超声波. 当汽车迎着波源驶来时. 与波源安装在一起的接受器接收到从汽车反射回来的超声波的频率为110kHz．已知空气中声速u为330m.s^{-1}, 求汽车行驶的速率.

解：第一步: 波向着汽车传播并被汽车接收, 此时波源是静止的. 汽车作为观察者迎着波源运动。设汽车的行驶速度为ν, 则接收到的频率为 $f' = f(u+\upsilon)/u$

第二步: 波从汽车表面反射回来，此时汽车作为波源向着接受器运动, 汽车发出的波的频率即是它接收到的频率ν′, 而接受器此时是观察者, 它接收到的频率为

$$f'' = \frac{u}{u-\upsilon} f' = \frac{u}{u-\upsilon} \frac{u+\upsilon}{u} f = \frac{u+\upsilon}{u-\upsilon} f$$

解得汽车行驶的速度为

$$\upsilon = \frac{f'' - f}{f'' + f} u = \frac{110-100}{110+100} \times 330 = 56.8\text{km.h}^{-1}$$

Homework

#1. S_1 与 S_2 为左、右两个振幅相等相干平面简谐波源，它们的间距为 $d=5\lambda/4$，S_2 质点的振动比 S_1 超前 $\pi/2$. 设 S_1 的振动方程为 $y_{10}=A\cos\dfrac{2\pi}{T}t$，且媒质无吸收，

（1）写出 S_1 与 S_2 之间的合成波动方程；

（2）分别写出 S_1 与 S_2 左、右侧的合成波动方程。

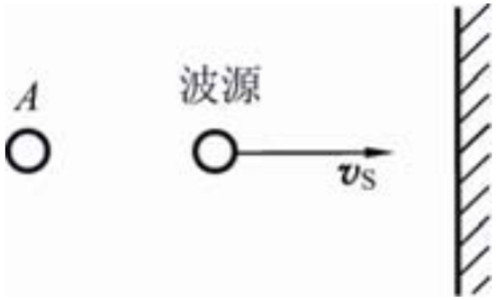
#2. 弦线上的驻波波动方程为：$y=A\cos(\dfrac{2\pi}{\lambda}x+\dfrac{\pi}{2})\cos\omega t$. 设弦线的质量线密度为 ρ.

（1）分别指出振动势能和动能总是为零的各点位置。

（2）分别计算 $0\rightarrow\dfrac{\lambda}{2}$ 半个波段内的振动势能、动能和总能量。

Homework

#3. 试计算：一波源振动的频率为 2040Hz，以速度 v_s 向墙壁接近（如图所示），观察者在 A 点听得拍音的频率为 $\Delta\nu = 3\text{Hz}$，求波源移动的速度 v_s，设声速为 340m/s。



#4. 一声源的频率为 1080Hz，相对于地以 30m/s 的速度向右运动，在其右方有一反射面相对于地以 65m/s 的速率向左运动，设空气中的声速为 331m/s，求：

（1）声源在空气中发出声音的波长；

（2）每秒钟到达反射面的波数；

（3）反射波的波速；

（4）反射波的波长。

Homework

#5. 钢轨中声速为$5.1X10^3$ m/s。今有一声波沿钢轨传播,在某处振幅为$1X10^{-9}$ m,频率为$1X10^3$ Hz。钢的密度为$7.9x10^3$ kg/m^3,钢轨的截面积按15cm^{2}计。
试求:(1)该声波在该处的强度;
(2)该声波在该处通过钢轨输送的功率。

#6. 物体超过声速的速度常用马赫数表示,马赫数定义为物体速度与介质中声速之比。一架超音速飞机以马赫数为2.3的速度在5000 m高空水平飞行, 声速按330m/s计。
(1)求空气中马赫锥的半顶角的大小。
(2)飞机从人头顶上飞过后要经过多长时间人才能听到飞机产生的冲击波声?

#7. 超声波源常用压电石英晶片的驻波振动。如图在两面镀银的石英晶片上加上交变电压，晶片中就沿其厚度的方向上以交变电压的频率产生驻波,有电极的两表面是自由的而成为波腹。设晶片的厚度d 为2.00 mm,石英片中沿其厚度方向声速是$5.74x10^3$m/s要想激起石英片发生基频振动,外加电压的频率应是多少?