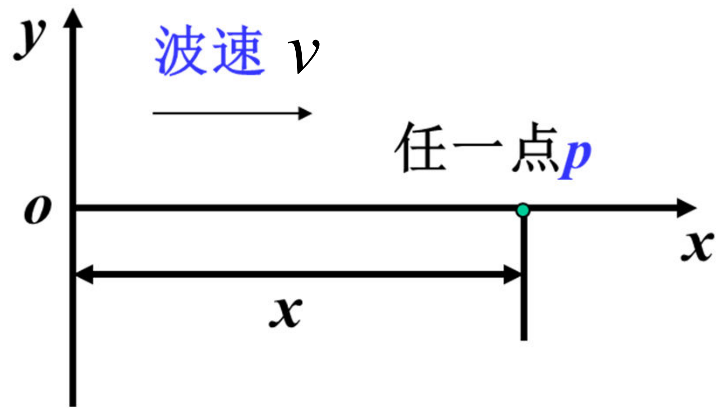
平面简谐波

简谐波：波源作简谐振动，在波传到的区域，媒质中的质元均作简谐振动。



设 $y_o = A\cos(\omega t + \varphi)$

求 p 点 y(x,t)

假设：媒质无吸收(质元振幅均为A)

图中p点比o点落后时间：$\dfrac{x}{v}$

则 $\boxed{y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \phi\right]}$ 向右传播的一维平面简谐波

平面简谐波

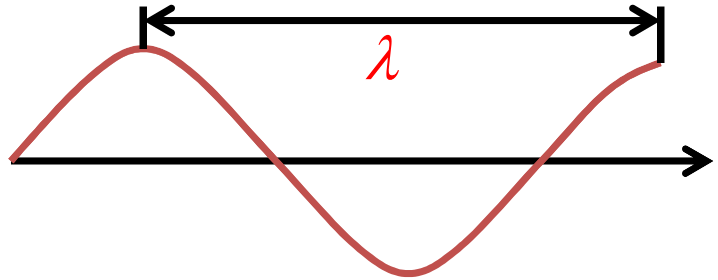
$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \phi\right]$$

对t微分 $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi\right] = -\omega^2 y$$ 任何一点都在做简谐振动

对x微分 $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} A cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi\right] = -\frac{\omega^2}{v^2} y$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

描述简谐波的物理量



1. 空间

波长：两相邻同相点间的距离 λ

波数：$\boxed{k = \dfrac{2\pi}{\lambda}}$ 即单位长度上波的相位变化

2. 时间

周期 T：波前进一个波长的距离所需的时间。

频率 f 和角频率 ω： $f = 1/T;\ \ \omega = 2\pi f$

3. 波速

等相位面沿波线向前推进的速度，即波速 v (单位时间波所传过的距离)。

波速的定义：$\boxed{v = \dfrac{\lambda}{T} = \lambda f = \dfrac{\omega}{k}}$

波动式的其他表达式

$$y = A\cos\left[2\pi f\,(t \mp \frac{x}{v}) + \varphi\right] \qquad (\omega = 2\pi f\,)$$

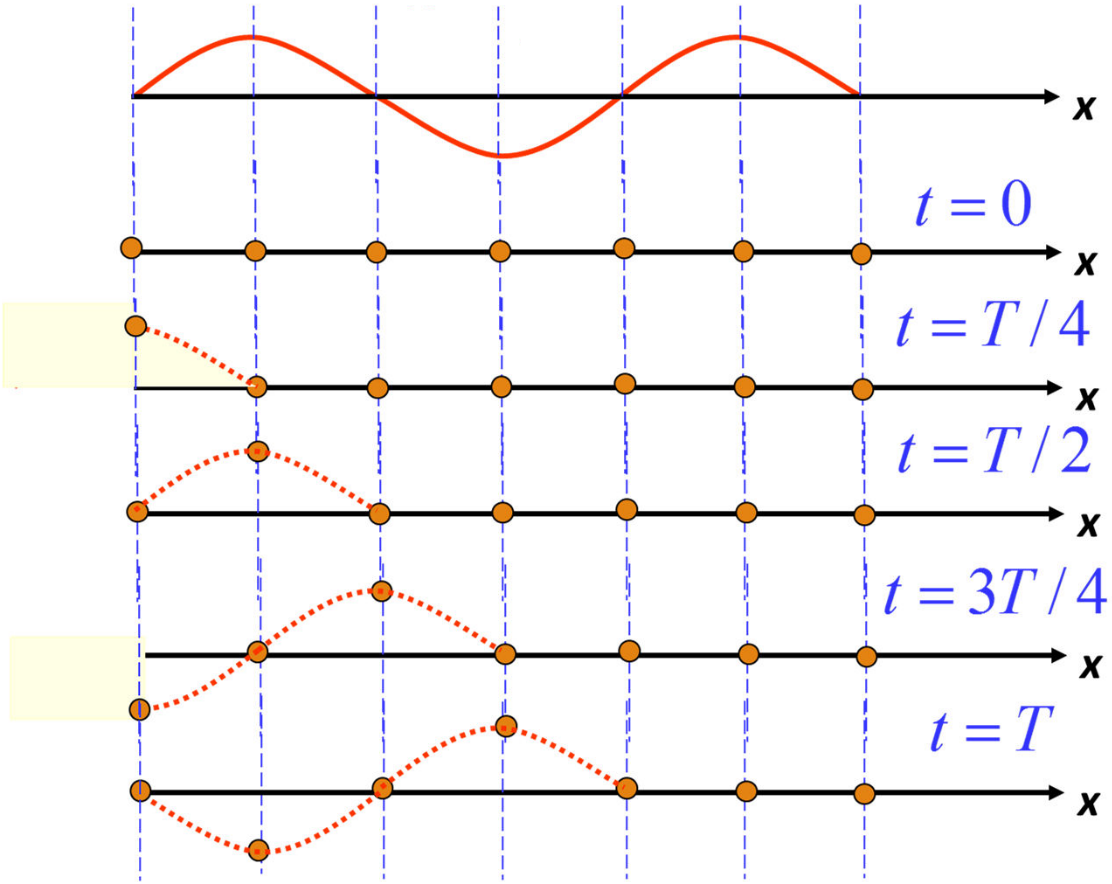
$$= A\cos\left[2\pi(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda}) + \varphi\right] \qquad (f = \frac{1}{T}, \lambda = vT)$$

$$= A\cos\left[k(vt \mp x) + \varphi\right] \qquad (k = \frac{2\pi}{\lambda}, v = \frac{\lambda}{T})$$

$$\boxed{= A\cos\left[\omega t \mp kx + \varphi\right]} \qquad (kv = \frac{2\pi}{T})$$

简谐波表达式的图像

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \qquad (f = \frac{1}{T}, \lambda = vT)$$



一维简谐波表达式的物理意义

由 $y(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ 从几方面讨论

a. 固定 x， $(x = x_0)$ $y(x_0,t) = A\cos(\omega t - kx_0)$

b. 固定 t， $(t = t_0)$ $y(x,t_0) = A\cos(\omega t_0 - kx)$

c. 如认定某一相位，即令 $(\omega t - kx)$=常数

相速度为： $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{k} = v$$

d. 表达式也反映了波是振动状态的传播

$y(x + \Delta x, t + \Delta t) = y(x,t)$ 其中 $\Delta x = v\Delta t$

一维简谐波表达式的物理意义

e. 表达式还反映了波的时间、空间双重周期性

T 时间周期性　　　λ 空间周期性

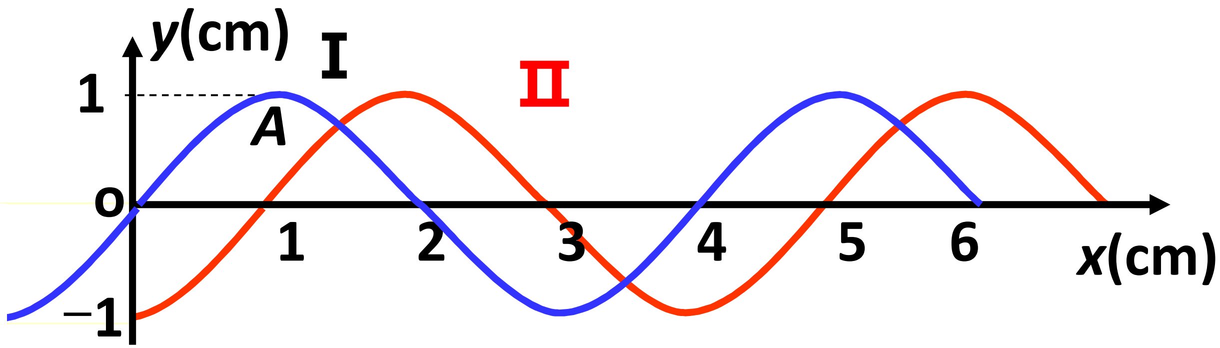
$$v=\frac{\lambda}{T}=\lambda f=\frac{\omega}{k}$$

➢注：相位差和波程差的关系

$$\boxed{\Delta\phi=\pm 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}=\pm k\Delta x}$$

例题

已知 t=0时的波形曲线为I，波沿ox方向传播，经t=1/2s后波形变为曲线II。已知波的周期T>1s，试根据图中绘出的条件求出波的表达式，并求A点的振动式。



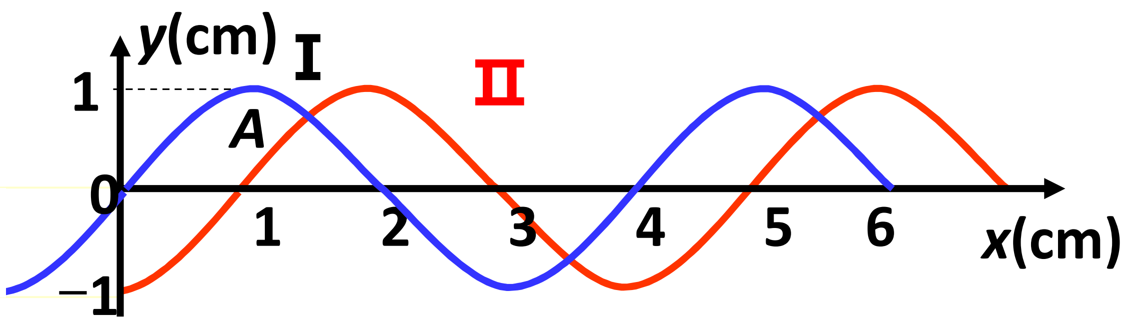
解： $A = 0.01\text{m}$

$\lambda = 0.04\text{m}$

波速：

$$v = \frac{x_1 - x_0}{t} = \frac{0.01}{1/2} = 0.02\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \quad T = \frac{\lambda}{v} = \frac{0.04}{0.02} = 2\text{s} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi\,\text{s}^{-1}$$

例题



原点振动：$y_0 = A\cos(\omega t + \varphi)$

初始条件： $0 = A\cos\varphi$

$$\rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

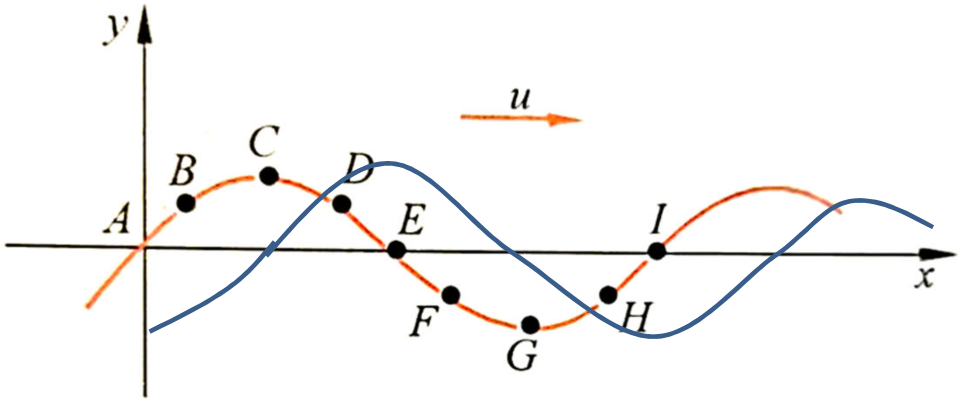
原点振动速度 $v_{y0} = -\omega A\sin\varphi < 0$ $\quad \sin\varphi > 0 \quad \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

原点的振动式 $y_0 = 0.01\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$

波动方程 $y = 0.01\cos(\pi(t - 50x) + \frac{\pi}{2})$

例题

- 设某时刻横波波形曲线如右图所示,试分别用箭头表示出图中A,B,C,D.E,F,G,H.I等质点在该时刻的运动方向,并画出经过1/4周期后的波形曲线。



答：各点会向其左侧质点所在高度靠拢，1/4周期后波形如蓝线所示。

- 沿简谐波的传播方向相隔Δx的两质点在同一时刻的相差是多少?分别以波长λ和波数k表示之。

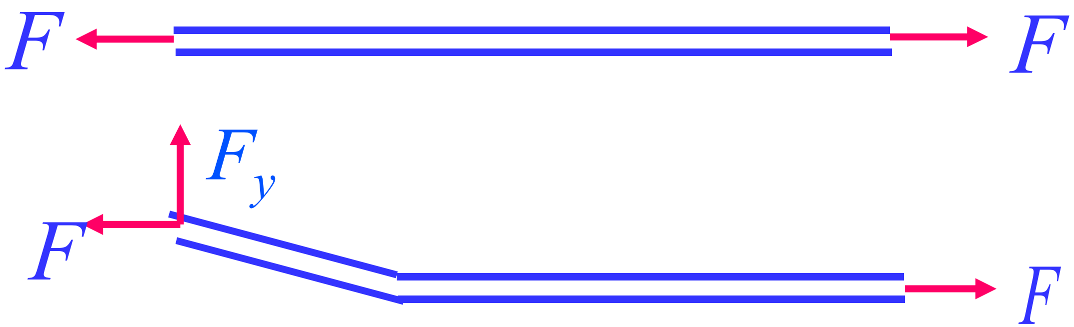
答：kΔx或者Δx*2pi/ λ

平面波的波动方程-弦上横波

transverse wave 横波

longitudinal wave 纵波

推导：以弦上的横波为例，设线密度μ，张力F（不变），求波速v



第一种推导：不使用微分（英文课本**P475**）

第二种推导-使用微分

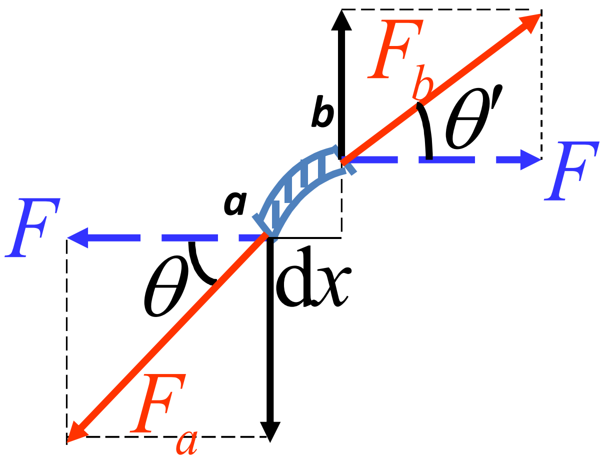
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

根据这一小段绳受的合外力 $= ma$

$$F_b \sin\theta' - F_a \sin\theta = \frac{F}{\cos\theta'}\sin\theta' - \frac{F}{\cos\theta}\sin\theta$$

牛二律：

$$= F(\tan\theta' - \tan\theta) = F\left(\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\mathrm{d}x} - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x}\right) = \mu\,\partial x\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$



$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{F}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

平面波的波动方程

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

平面波的波动方程

一维平面简谐波波动式是它的解。

$$y = A\cos(\omega t - kx)$$

时间、空间的耦合解；推广来说，这是所有一维传播波的基本解形式。

- 机械波
- 电磁波
- 自由电子
- 。。。

平面简谐波的功率P

$$F_y(x, t) = -F\frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$$

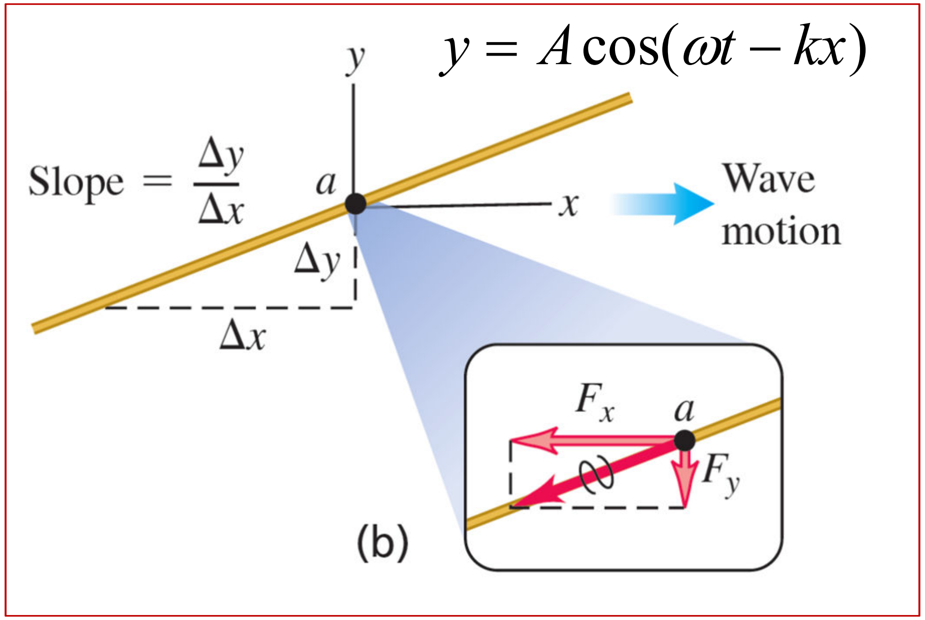
$$P(x, t) = F_y(x, t)v_y(x, t) = -F\frac{\partial y(x, t)}{\partial x}\frac{\partial y(x, t)}{\partial t}$$

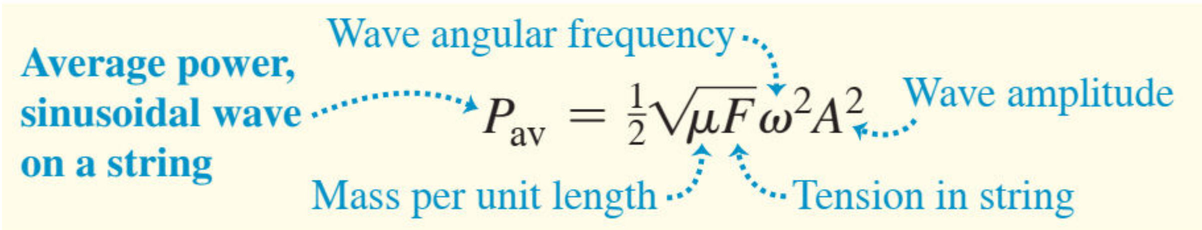
$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = -kA\sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \omega A\sin(kx - \omega t)$$

$\omega = vk$ and $v^2 = F/\mu$

$$P(x, t) = \sqrt{\mu F}\,\omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

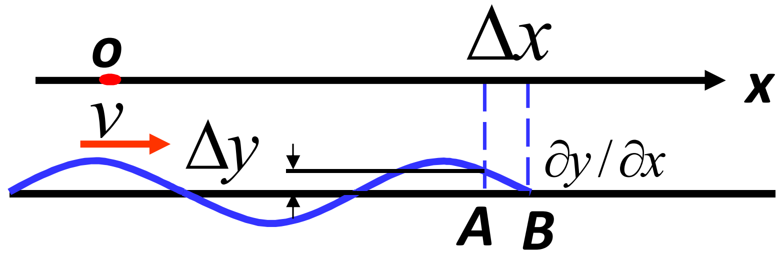




$$P_{av} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\,\omega^2 A^2$$

相对于平衡态机械波的能量变化

设 $y = A\cos(\omega t - kx)$



$$\Delta E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}\mu \Delta x(\frac{\partial y}{\partial t})^2$$ 一小段弦内的动能

势能 $$\Delta x \rightarrow \left[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \Delta x\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

一小段弦的伸长幅度 – 微小形变

$$\Delta E_{\mathrm{p}} = F\left\{\Delta x\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - \Delta x\right\} \approx \frac{1}{2}F\Delta x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

相对于平衡态简谐波的能量变化 $y = A\cos(\omega t - kx)$

$$\Delta E = \Delta E_{\mathrm{k}} + \Delta E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\mu\Delta x\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}F\Delta x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

对于平面简谐波

$$\boxed{\Delta E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}\mu\Delta x\omega^2 A^2\sin^2(\omega t - kx)}$$

$$\boxed{\Delta E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}F\Delta x k^2 A^2\sin^2(\omega t - kx)}$$

$\because v = \dfrac{\omega}{k} = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$ $\quad\therefore \Delta E_{\mathrm{k}} = \Delta E_{\mathrm{p}}$

$$\boxed{\Delta E = \Delta x\mu\omega^2 A^2\sin^2(\omega t - kx)}$$

例题

拉紧的橡皮绳上传播横波时,在同一时刻,何处动能密度最大?何处弹性势能密度最大?何处总能量密度最大?何处这些能量密度最小?

答：y=0位置动能和势能密度最大，y=A或-A处最小。

A为振幅。

机械波的独立传播原理

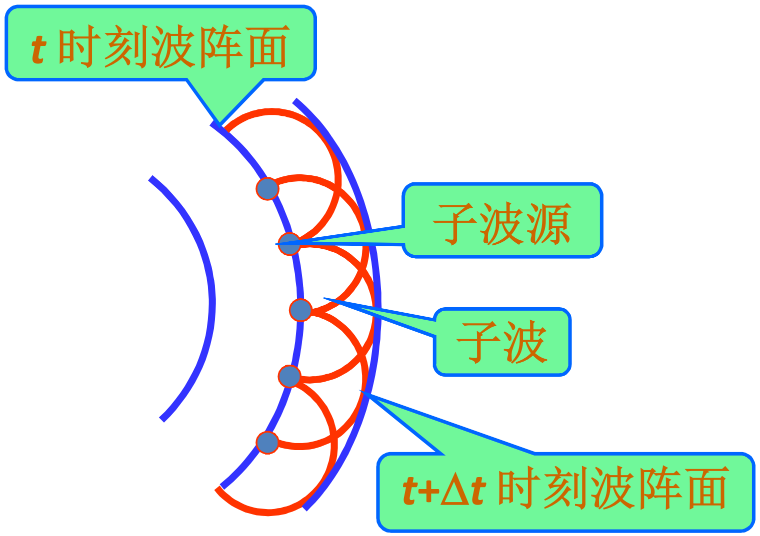
- 若干个相同种类的波在介质中传播时，一般情况下每一列波的传播不受到其他波的影响。

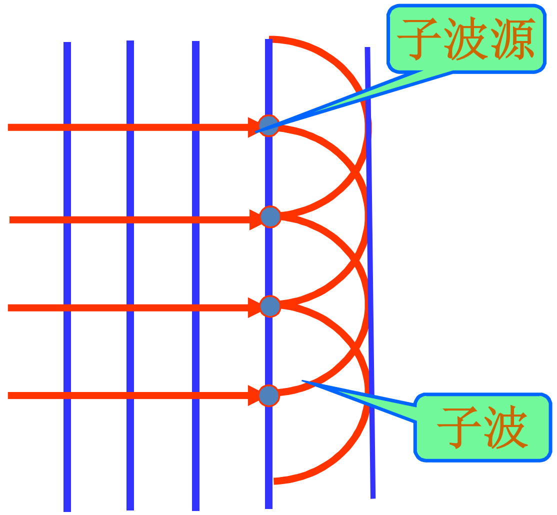
- 波的独立传播定律成立时，介质中每一个点部位的振动是各列波单独传播到该点部位振动的叠加，这是波的叠加原理。

- 这两个原理是波的产生和传递满足线性方程的直接后果。

*惠更斯原理

波动传到的各点都可以看作是发射子波的波源，在其后的任一时刻，这些子波波阵面的包络面就决定新的波阵面。



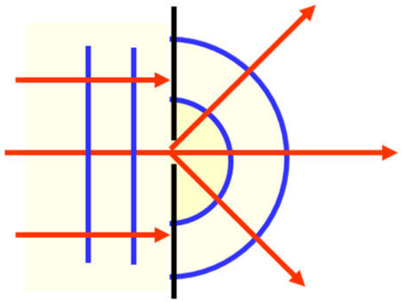


*波动现象：衍射

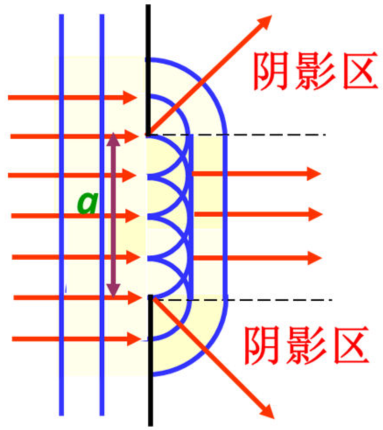
1. 现象

波传播过程中当遇到障碍物时，能绕过障碍物的边缘而传播的现象——衍射。

2. 作图 （可用惠更斯原理作图）



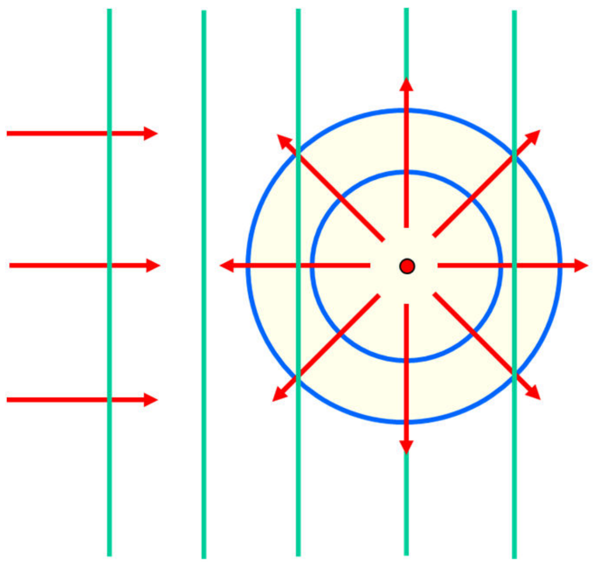
（1）$a << \lambda$



（2）$a \sim \lambda$

*波动现象：散射

当波在传播途中遇到球形小颗粒时，波将以小颗粒为球心发射球面子波，使波向各个方向散开，这一现象称为散射。



*波动现象：折射

用作图法求出折射波的传播方向

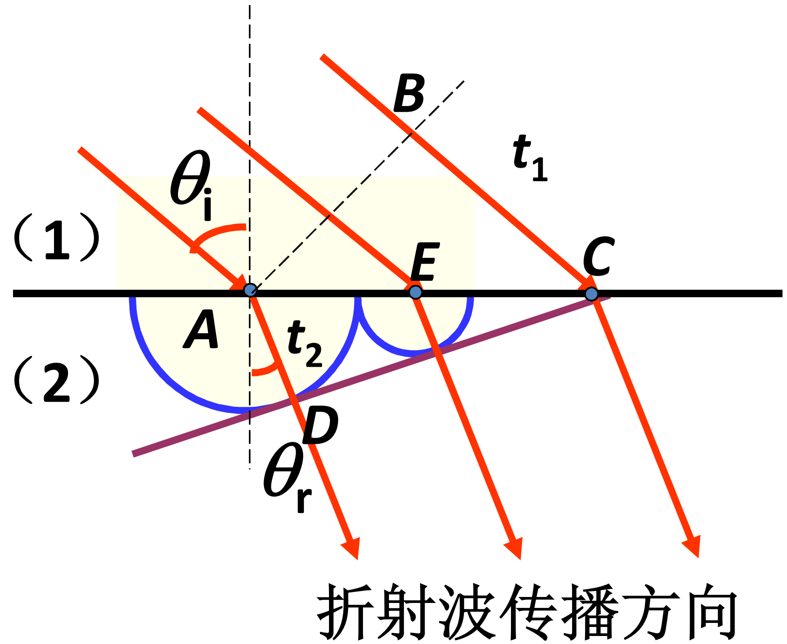
$BC=v_1(t_2-t_1)$

$AD=v_2(t_2-t_1)$

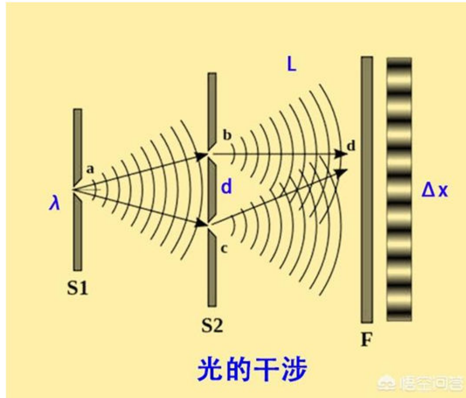
由图可得波的折射定律：

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{v_1}{v_2}$$

θ_i—入射角，θ_r—折射角。

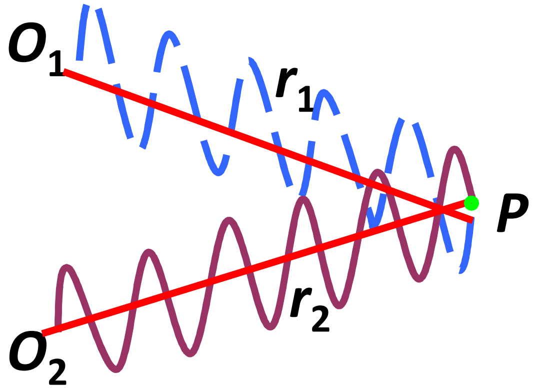


波的干涉现象　基于波的独立传播和叠加原理



相干条件：频率相同，振动方向相同，相位差恒定

两相干波在空间相遇，某些点的振动始终加强另一些点的振动始终减弱，即出现干涉现象。



设 $y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1 - kr_1)$

$y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2 - kr_2)$

证明：$y = y_1 + y_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$

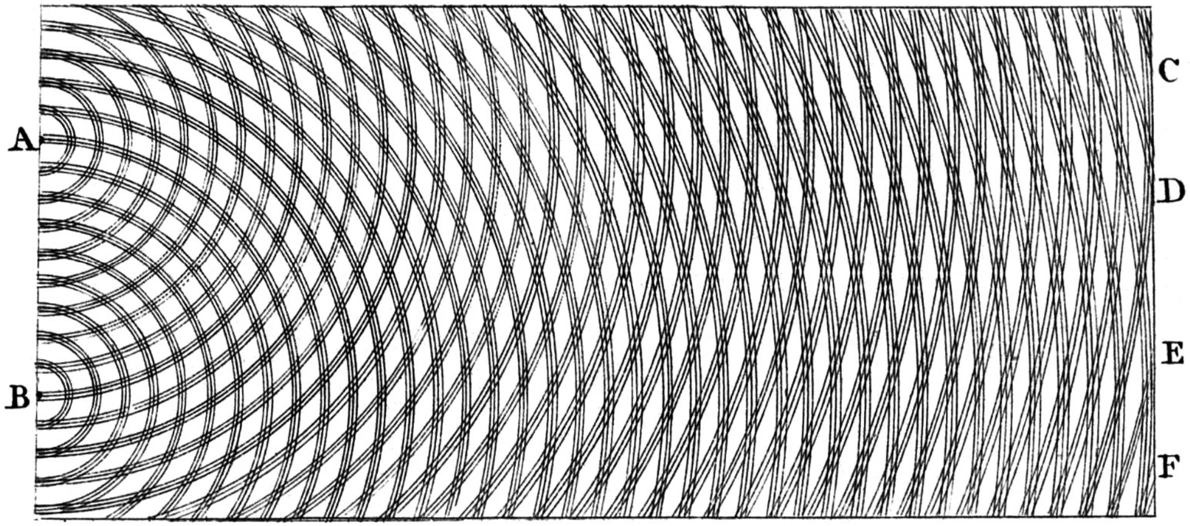
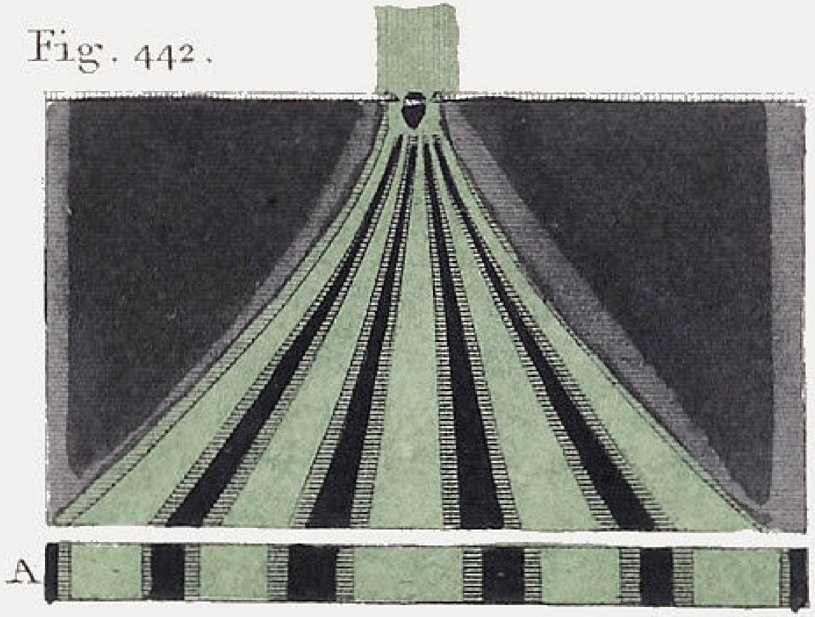

A
B
C
D
E
F

Fig. 442.


A

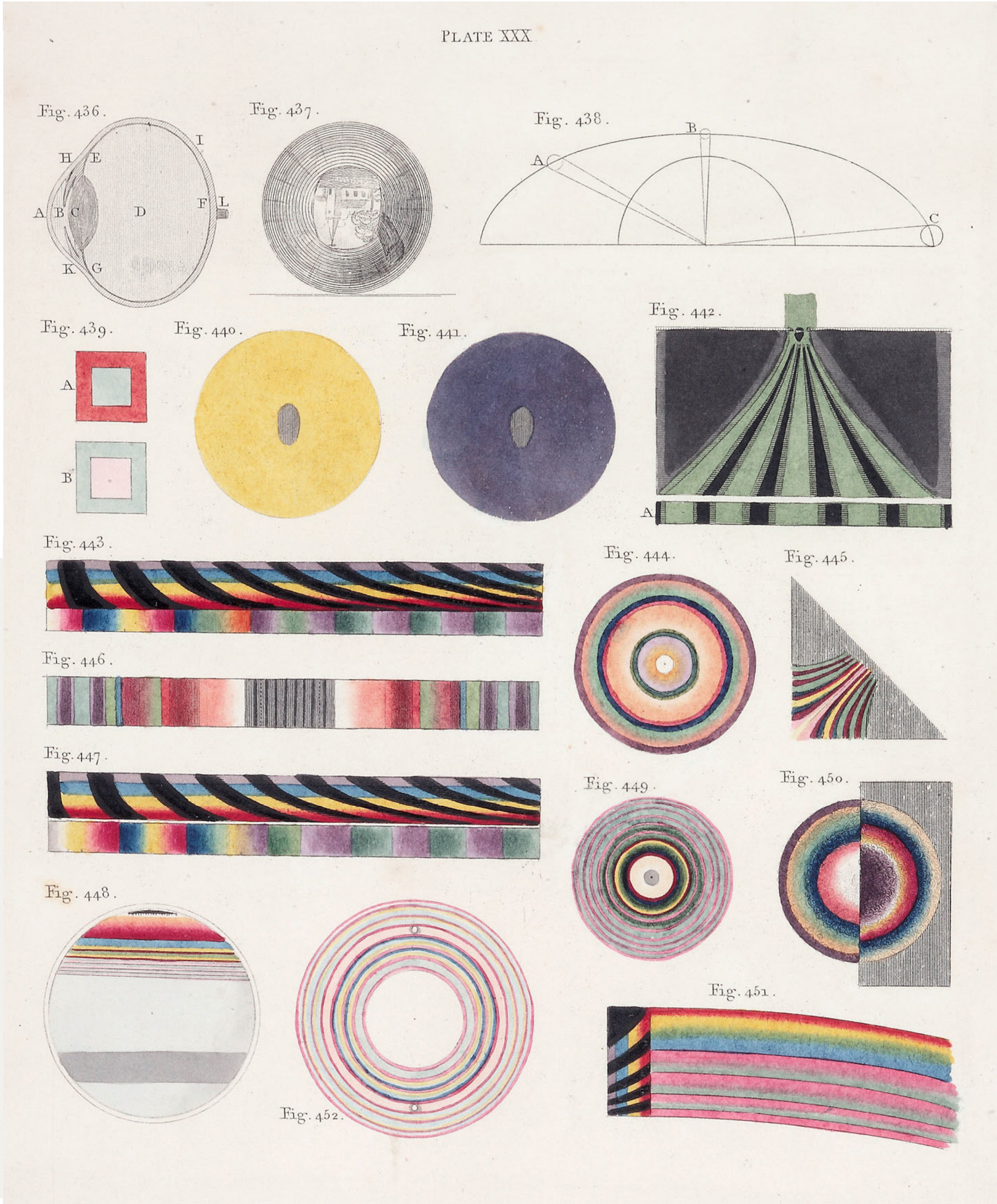


PLATE XXX
Fig. 436.
H E
I
A B C
D
F L
K G
Fig. 437.
Fig. 438.
A
B
C
Fig. 439.
A
B
Fig. 440.
Fig. 441.
Fig. 442.
A
Fig. 443.
Fig. 444.
Fig. 445.
Fig. 446.
Fig. 447.
Fig. 449.
Fig. 450.
Fig. 448.
Fig. 451.
Fig. 452.

波的干涉现象

其中 $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 - k(r_1 - r_2)$$

设 $\varphi_2 = \varphi_1$ $\Delta\varphi = k(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$

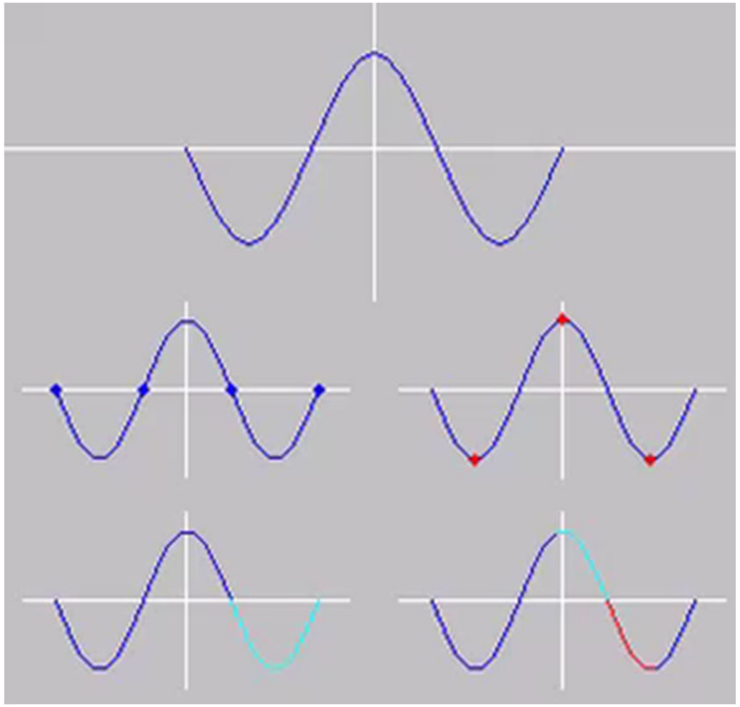
➢当 $r_2 - r_1 = \pm n\lambda, \quad n = 0,1,2\cdots$ $\boxed{A = A_1 + A_2 \quad I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}}$ 相长

➢当 $r_2 - r_1 = \pm(2n+1)\frac{\lambda}{2}, \quad n = 0,1,2\cdots$ $\boxed{A = \left|A_1 - A_2\right| \quad I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}}$

相消

驻波(Standing wave)

在给定一定边界条件限制后，平面波的传播表现出“停下来”的行为。



驻波(Standing wave)

当两列振幅相同，频率相同，振动方向相同的波以相反方向传播时，叠加形成驻波。

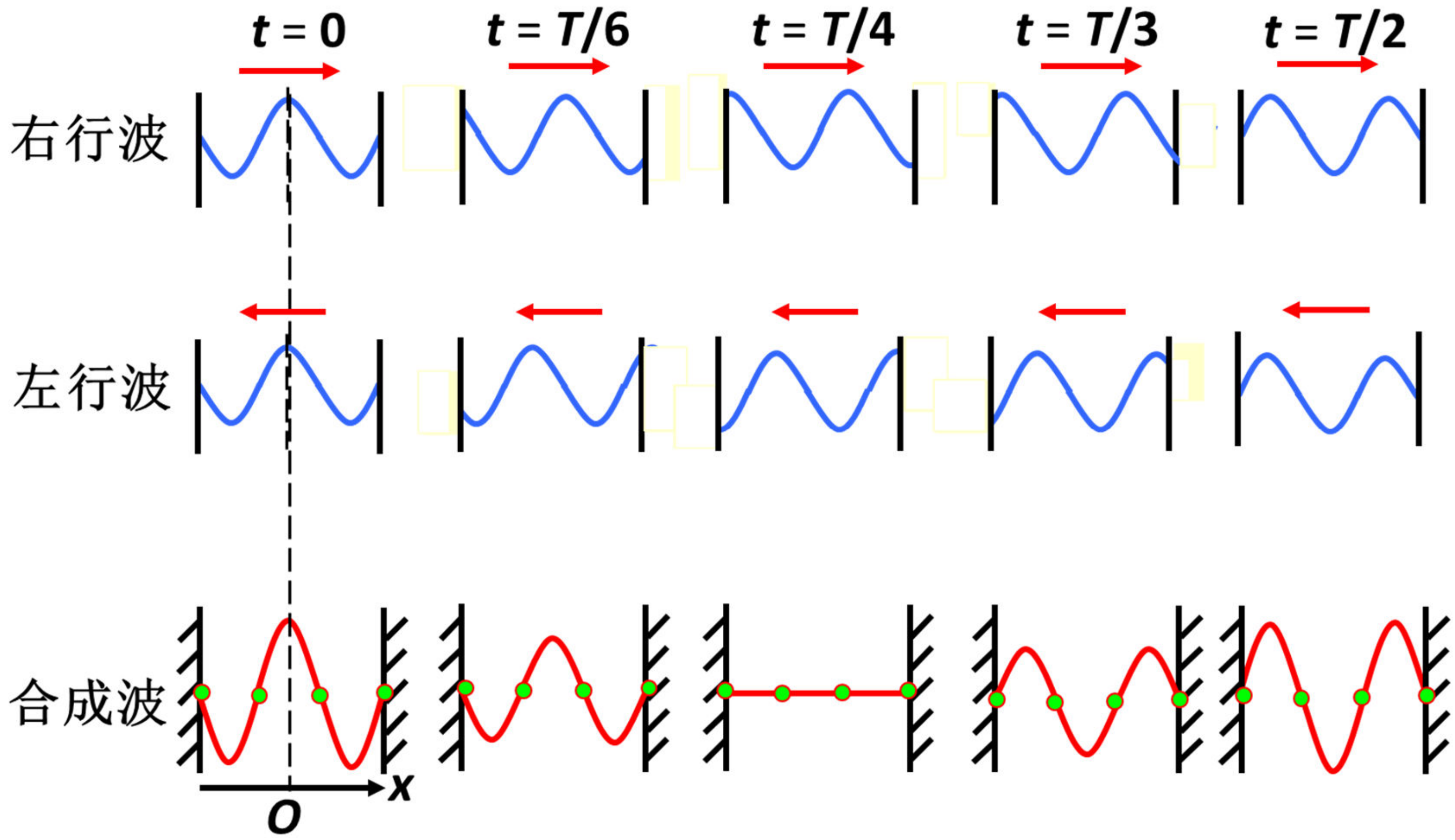
1. 表达式

设：
$$y_1 = A\cos(\omega t - kx)$$
$$y_2 = A\cos(\omega t + kx)$$
$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos kx\cos\omega t$$

或：
$$y_1 = A\cos(\omega t - kx)$$
$$y_2 =-A\cos(\omega t + kx)$$
$$y = 2A\sin kx\sin\omega t$$

驻波的图像

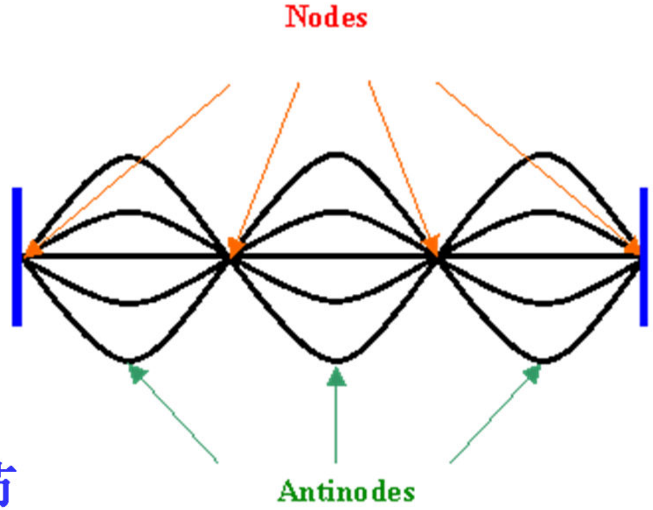
$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos kx \cos \omega t$$



驻波的形状

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos kx\cos\omega t$$

2. 振幅最大： $kx = \pm n\pi \quad n = 0,1,2\cdots$ 波腹



腹—腹 $\boxed{\Delta x = \dfrac{\lambda}{2}}$

振幅最小： $kx = \pm(2n+1)\dfrac{\pi}{2} \quad n = 0,1,2\cdots$ 波节

节—节 $\boxed{\Delta x = \dfrac{\lambda}{2}}$ 腹—节 $\boxed{\Delta x = \dfrac{\lambda}{4}}$

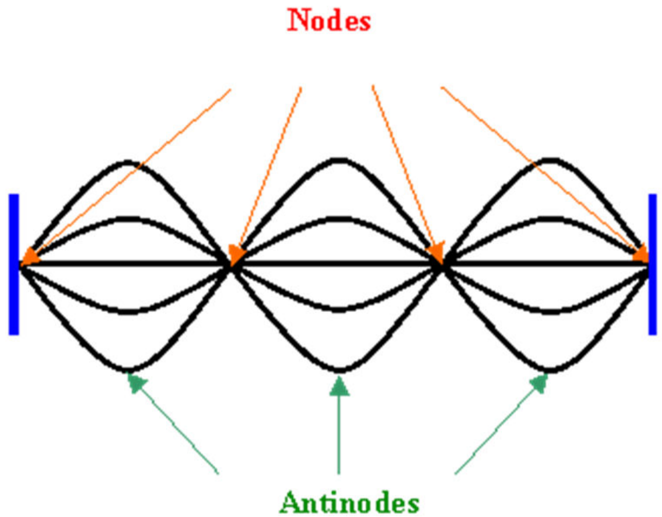
驻波的形状

3. 相位

作振幅为 $2A\cos kx$ 的简谐振动

两相邻波节之间的质元相位相同

每一波节两侧各质元相位相反。



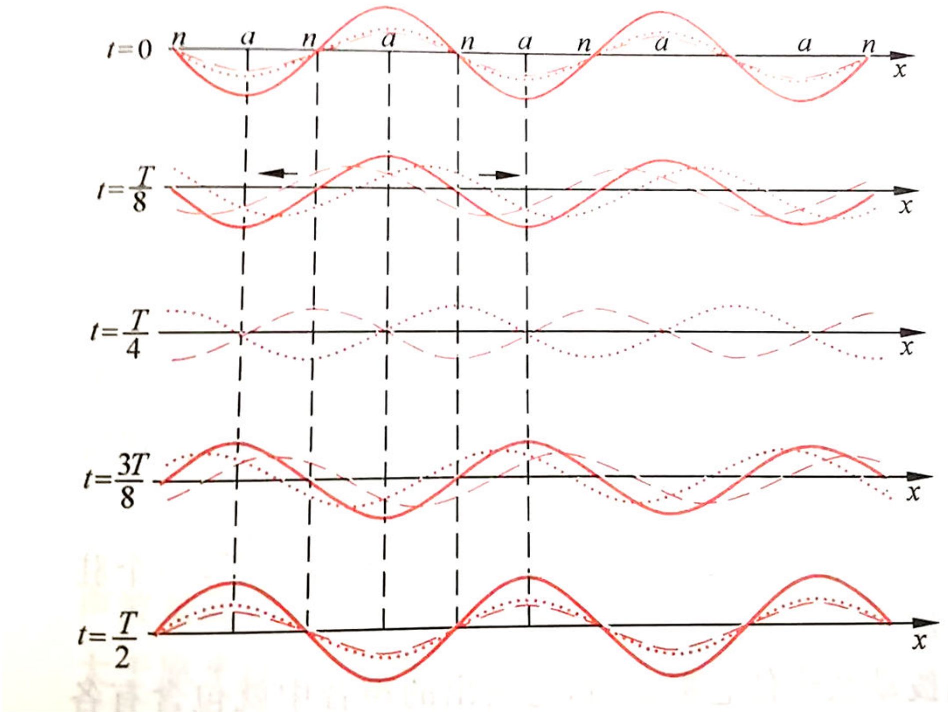
4. 能量

波节只有势能，波腹只有动能。

当所有各点达到最大位移，全部能量为势能。

当所有各点达到平衡位置，全部能量为动能。

在下图的驻波形成图中,在t=T/4时,各质元的能量是什么能?大小分布如何?在t=T/2时,各质元的能量是什么能?大小分布又如何?波节和波腹处的质元的能量各是如何变化的?



答:

T/4时为动能，波节处为0，波腹处最大。

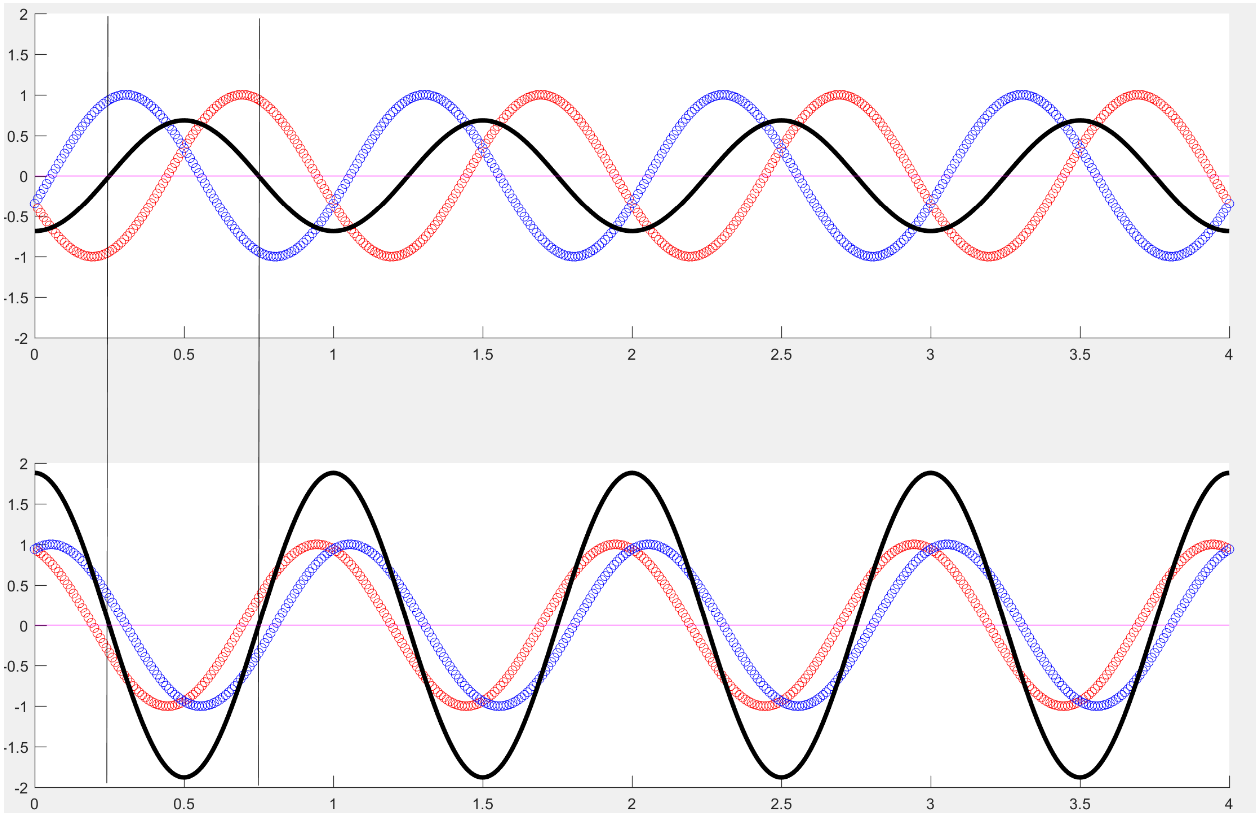
T/2时为势能，波节处最大，波腹处为0.

波节处动能始终为0，势能周期性随时间变化，

波腹处势能始终为0，动能周期性随时间变化。

驻波的简正模式(normal mode)

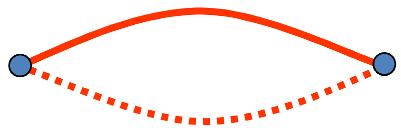
两端固定的张紧弦中产生驻波



驻波的简正模式(normal mode)

两端固定的张紧弦中产生驻波，因此波长只能取分立的值。
因此对角频率和波数也有相应分立值要求

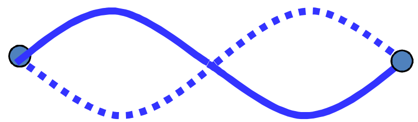
$$n \cdot \frac{\lambda}{2} = L \qquad n = 1,2,3\cdots$$



$n = 1$

$$\boxed{f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{2L} \qquad n=1,2,3\cdots}$$

*v*为波动传播的速度，
*f*称为简正频率



$n = 2$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{L} \qquad n = 1,2,3\cdots \qquad \omega = 2\pi f = \frac{n\pi v}{L} \qquad n = 1,2,3\cdots$$

对应的驻波称为弦的简正模或固有振动

驻波的基本频率

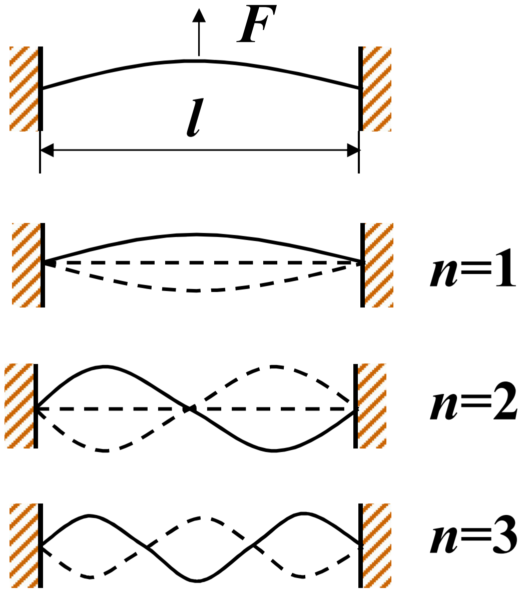
Standing Waves and String Instruments

From Eq. (15.32), the fundamental frequency of a vibrating string is $f_1 = v/2L$. The speed v of waves on the string is determined by Eq. (15.14), $v = \sqrt{F/\mu}$. Combining these equations, we find

$$\underbrace{f_1}_{\text{Fundamental frequency, string fixed at both ends}} = \frac{1}{\underbrace{2L}_{\text{Length of string}}}\sqrt{\frac{\overbrace{F}^{\text{Tension in string}}}{\underbrace{\mu}_{\text{Mass per unit length}}}} \tag{15.35}$$

实例：乐器的结构与音色

对于两端固定的弦，最低频率叫做**基频**，而其它的频率叫做**泛音**。一种乐器所奏出的特定**音调**(基频)的**音色**，决定于存在的泛音的数目和这些泛音各自的强度。



波长 $\lambda_n = \dfrac{2l}{n}$

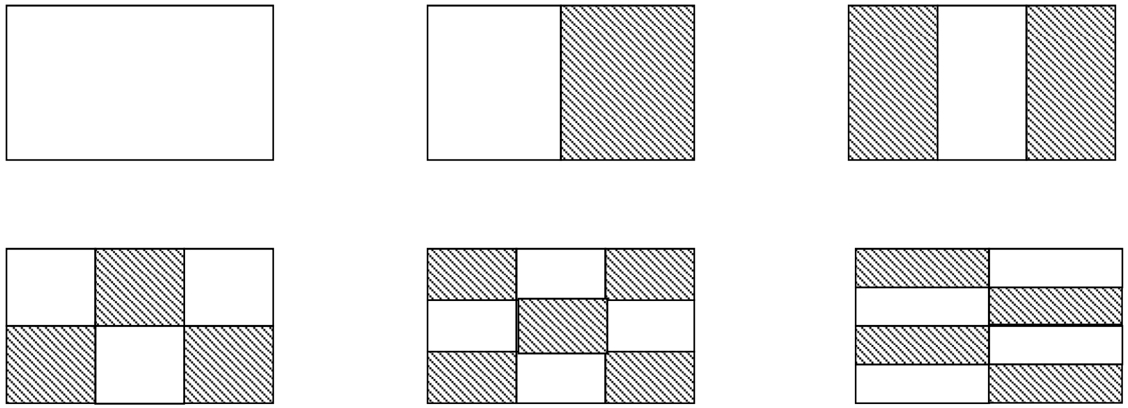
波频 $f_n = \dfrac{nv}{2}$

其中 $n = 1,2,3,\cdots$

系统究竟按那种模式振动，取决于初始条件,一般是各种简正模式的叠加.

*二维驻波

板和膜的振动，波在边界往复的反射形成驻波.



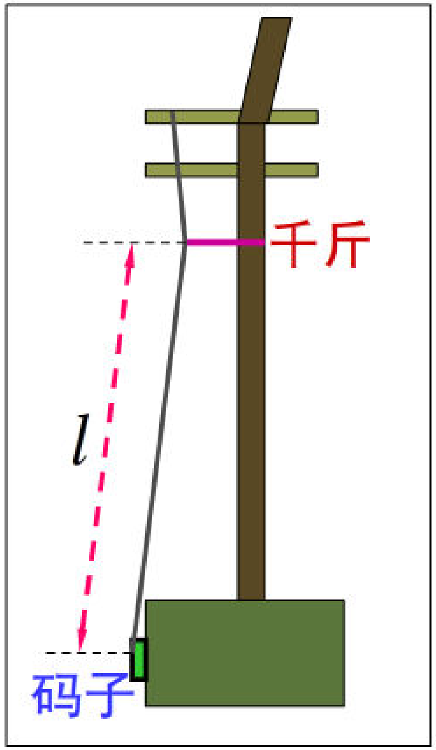
矩形膜上的二维驻波，阴影部分和明亮部分反相，两者的交线为波节.

例题：钢琴最高音的频率是最低音的150倍。如果最高音的弦长5.0cm，而最低音的弦线密度与最高音的一样，且弦上的张力也一样，请问最低音的弦长应为多少？

解：因为两根弦的线密度相同，张力也相同，所以在弦中传播的波速也是一样的，所以频率*f*仅与弦的长度*L*有关，有 $\frac{L_{\mathrm{L}}}{L_{\mathrm{H}}}=\frac{f_{\mathrm{H}}}{f_{\mathrm{L}}}$ ，下标L和H分别表示最低和最高频率。

因此，L_{L}= $L_{\mathrm{H}}\times\frac{f_{\mathrm{H}}}{f_{\mathrm{L}}}$ =5.0×150=750(cm)。

如图二胡弦长$l=0.3\,\mathrm{m}$，张力$T=9.4\mathrm{N}$．密度$\rho=3.8\times10^{-4}\,\mathrm{kg/m}$．求弦所发的声音的基频和谐频.



解：弦两端为固定点，是波节.

$$l=n\frac{\lambda}{2}\quad n=1,2,\cdots$$

频率 $f=\dfrac{v}{\lambda}=\dfrac{nv}{2l}$　　波速 $v=\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$

基频　$n=1$　$f_1=\dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}=262\ \mathrm{Hz}$

谐频　$n>1$　$f_n=\dfrac{n}{2l}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$