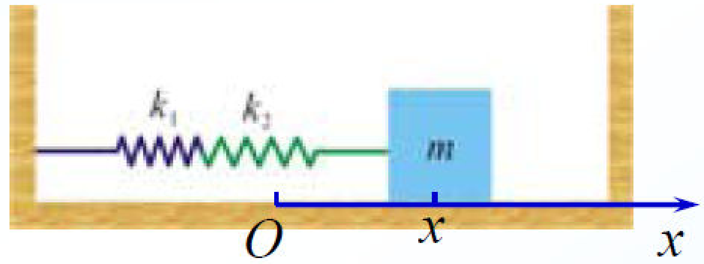
例：一放置在水平桌面上的弹簧振子,周期为0.5s。当t=0时 x_0=-1.0×10^{-2}m，v_0=0.218ms^{-1}。求运动方程。

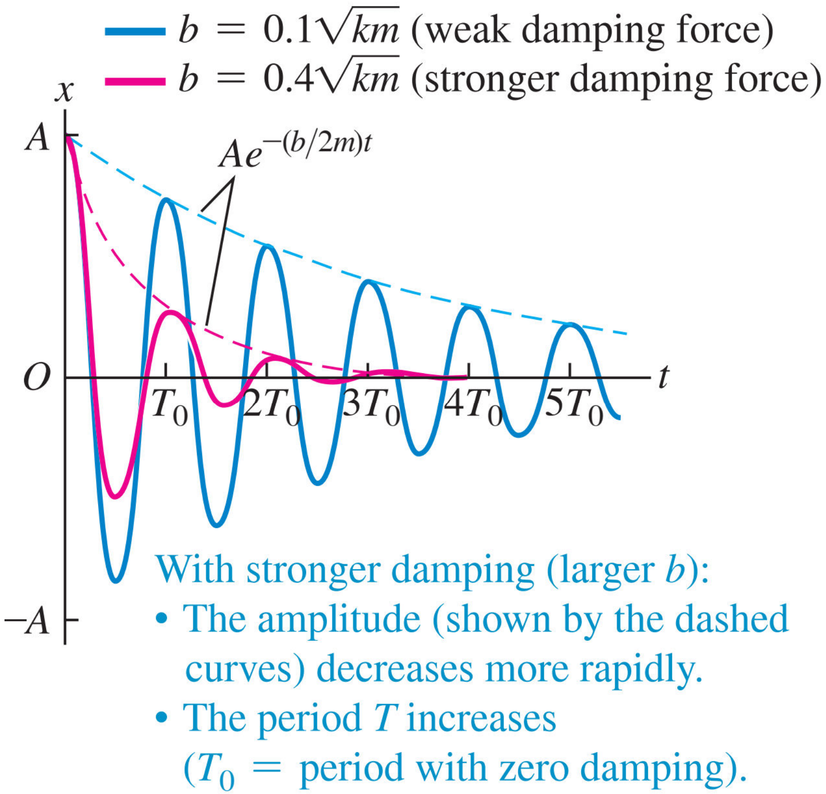
例1: 证明图示系统的振动为简谐运动, 其频率为

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}}$$



G. 阻尼振动（damped oscillation）

The decrease in amplitude caused by dissipative forces is called **damping**



考虑摩擦力 $-bv_x$，b 为阻尼系数

则合力为： $\sum F_x = -kx - bv_x$

$$-kx - bv_x = ma_x \qquad \text{or} \qquad -kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

阻尼振动方程：

Displacement of oscillator, little damping

Initial amplitude

Damping constant

Mass

Time

$$x = Ae^{-(b/2m)t}\cos(\omega' t + \phi)$$

Angular frequency of damped oscillations

Phase angle

Angular frequency of oscillator, little damping

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Force constant of restoring force

Damping constant

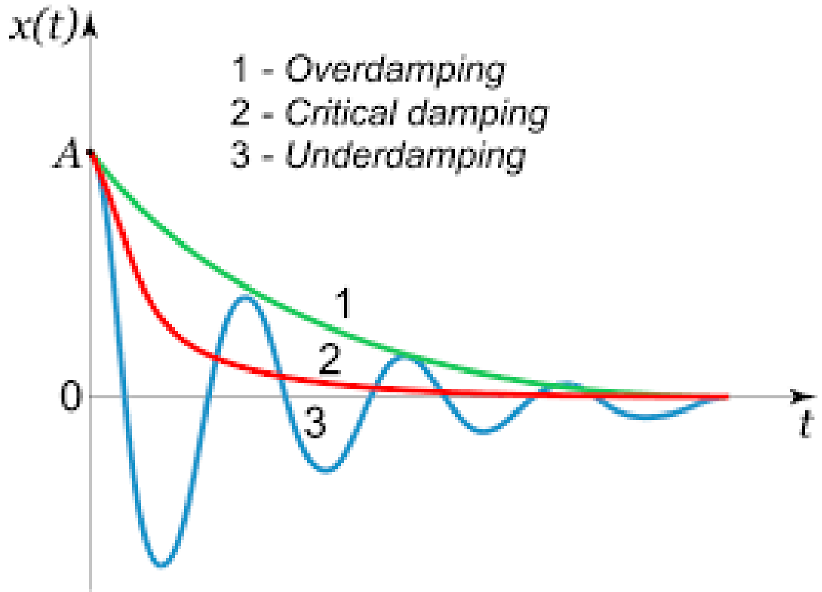
Mass

$$b = 2\sqrt{km}$$

临界阻尼（critical damping），刚好不发生振荡

>此值，过阻尼（overdamping），不发生振荡

<此值，欠阻尼（underdamping），衰减振荡



Q值（品质因子，quality factor）：

由于阻尼的存在，物体在每完成一个周期的振荡，其总能量 E 就衰减去$(\Delta E)_T$

定义品质因子Q，用来度量阻尼振动中保持能量的能力：

$$Q = 2\pi \frac{E}{(\Delta E)_T}$$

Q值越大，则阻尼和能量损耗越小。

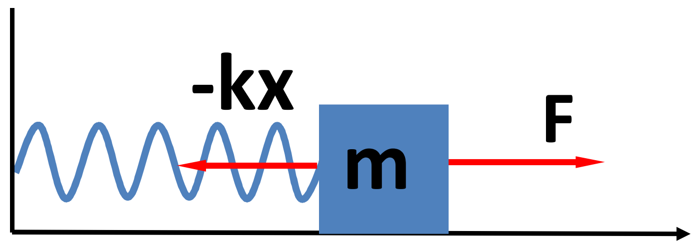
Q值可能随时间改变，但大部分的阻尼振动中，Q值近似与时间无关，是个常数。

H. 受迫振动（forced oscillation）

无阻尼受迫振动

强迫力： $F(t)=F_0\cos(\omega t+\beta)$

弹簧力： $-kx$



1. 受迫振动的运动微分方程

$$m\ddot{x}=-kx+F(t) \quad ==> \ddot{x}+\omega_0^2 x=\frac{F_0}{m}\cos(\omega t+\beta)$$

令其特解为 $x_1=A\cos(\omega t+\beta)$ ，代入得

$$A=\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$$

微分方程的通解为

$$x = \boxed{A_0\cos(\omega_0 t+\phi_0)} + \boxed{\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos(\omega t+\beta)}$$

有阻尼时
衰减消失

***F*(*t*)的稳态响应**
与初始条件无关

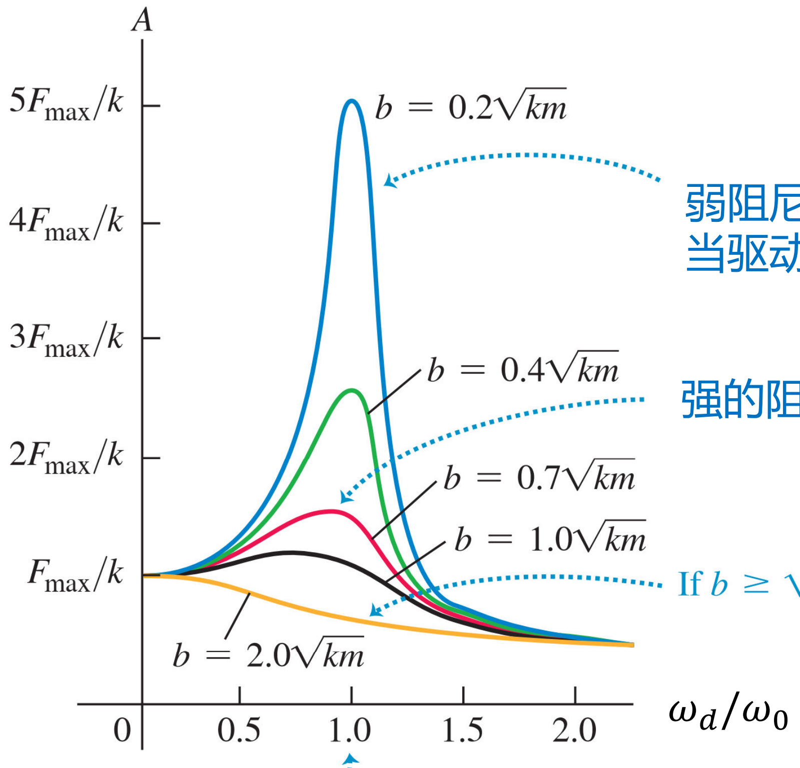
$$A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$$

- 当ω小于ω_0，则A是正值。
- 当外加频率ω大于谐振子的固有频率ω_0，A是负值。
- 当外加频率ω很高时，分母变得很大，振幅反而不会太大。
- 当ω≌ω_0 时，振幅A将达很大的值，这种现象称为共振
- 当$\omega=\omega_0$ 时，振幅A应趋于无穷大???

有阻尼受迫振动 (阻尼力：$f=-bv_x$)

系统在周期性驱动力作用下的振动，
振动角频率等于驱动力的角频率ω_d

振幅： $$A=\frac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\omega_0^2-\omega_d^2\right)^2+b^2\omega_d^2}}$$



弱阻尼振动表现出尖锐的共振峰，
当驱动频率ω_d接近本征频率ω时，
振幅最大

强的阻尼导致峰值的降低和峰的
展宽并向低频移动

If $b\geq\sqrt{2km}$, the peak disappears completely.

Driving frequency ω_d equals natural angular frequency ω of an undamped oscillator.

共振：

$$\omega_d=\omega_0 \quad \text{(resonance)},$$

此时振幅*A*将达很大的值，这种现象称为共振

Q值（品质因子，quality factor）：

由于阻尼的存在，物体在每完成一个周期的振荡，其总能量 E 就衰减去$(\Delta E)_T$

定义品质因子Q，用来度量阻尼振动中保持能量的能力：

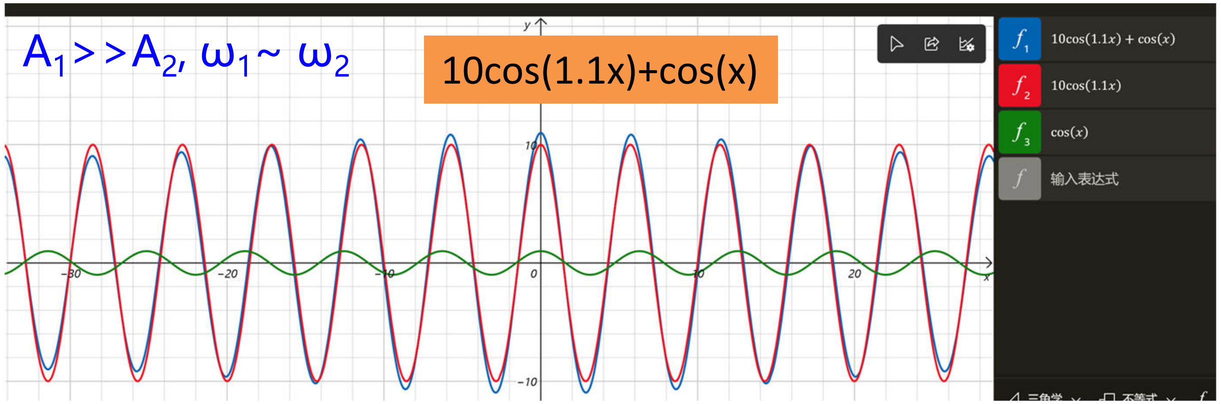
$$Q = 2\pi \frac{E}{(\Delta E)_T}$$

Q值越大，则阻尼和能量损耗越小。

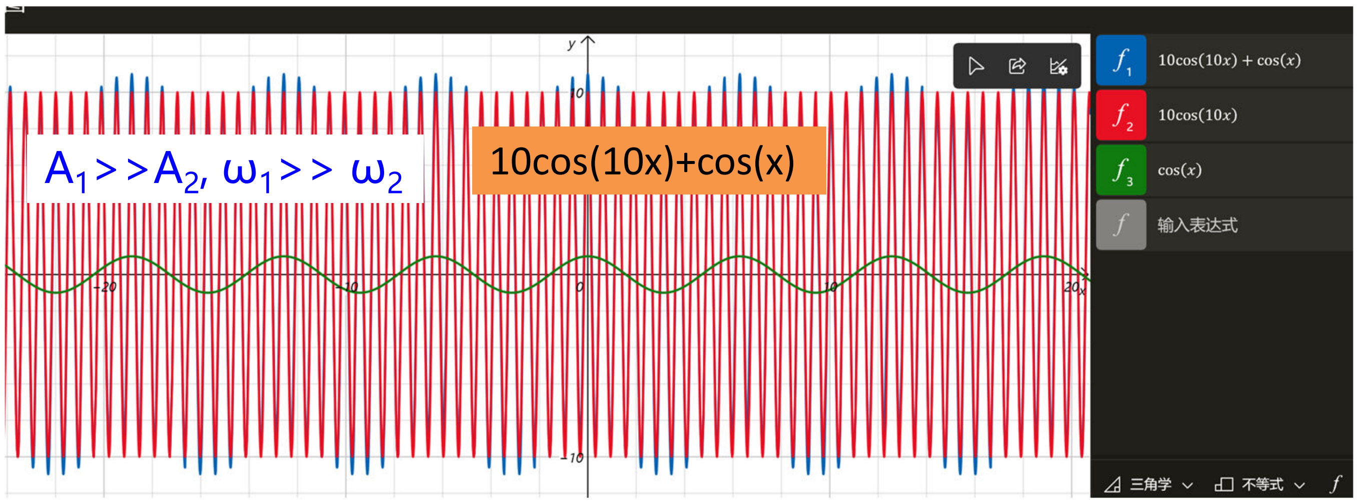
Q值可能随时间改变，但大部分的阻尼振动中，Q值近似与时间无关，是个常数。

合频： $A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$

I. 一个振动的振幅远大于另一个: A1>>A2



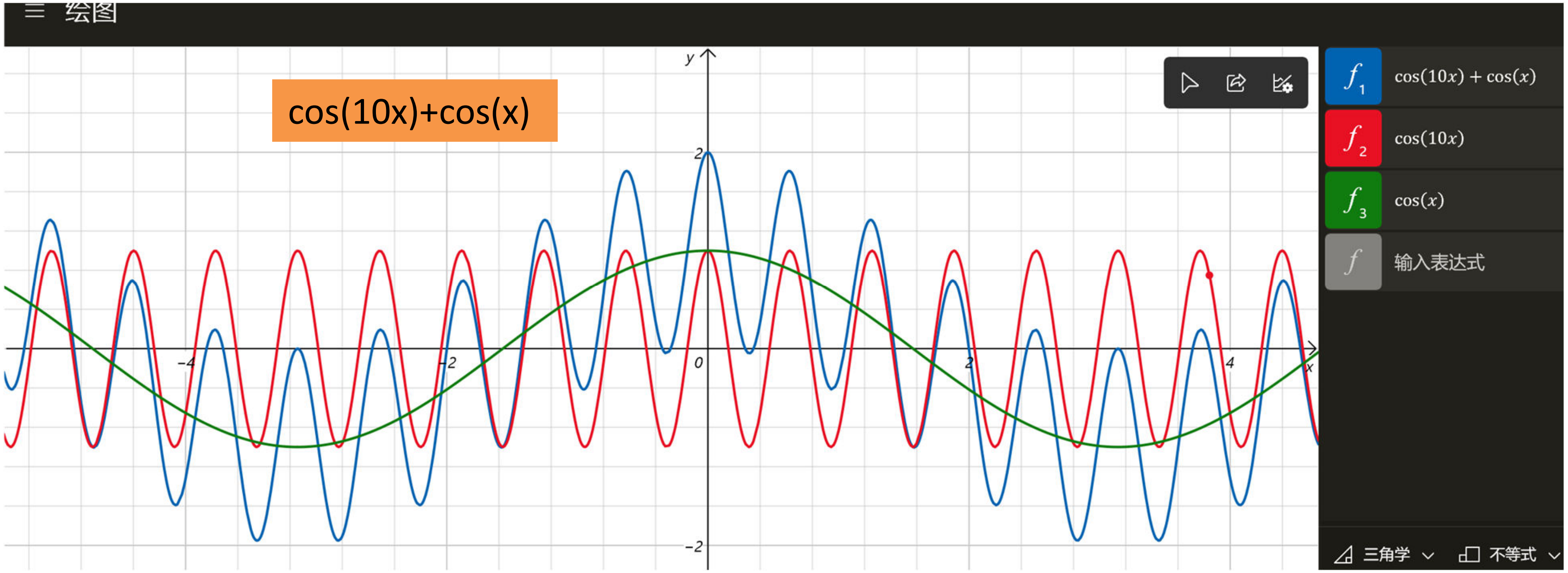
红色和绿色是分振动；
蓝色是合振动



合频振动是小振动对大振动的微扰。

合频： $A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+ A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$

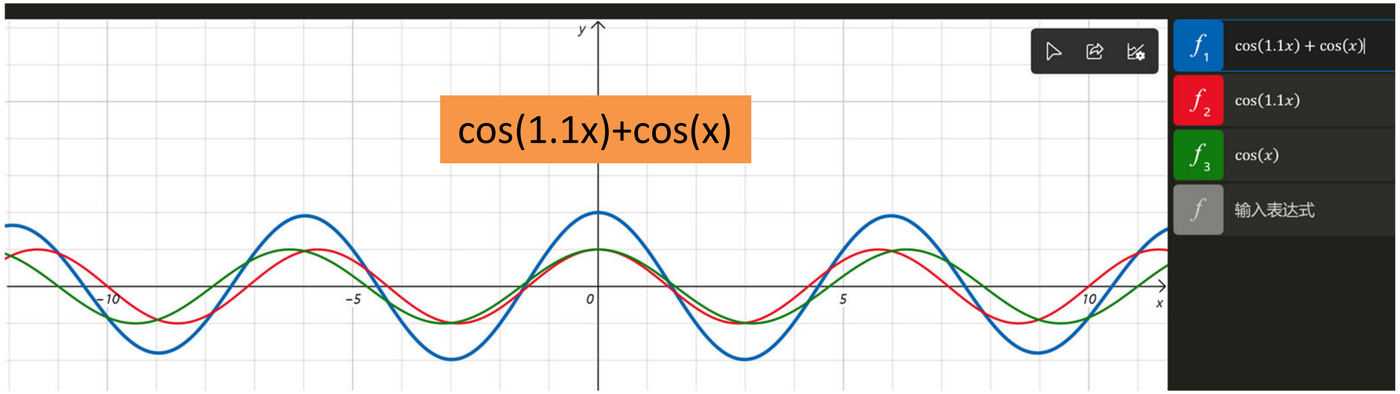
II. 两个振动的振幅相当，但频率差别很大: $A_1 \sim A_2, \omega_1 >> \omega_2$

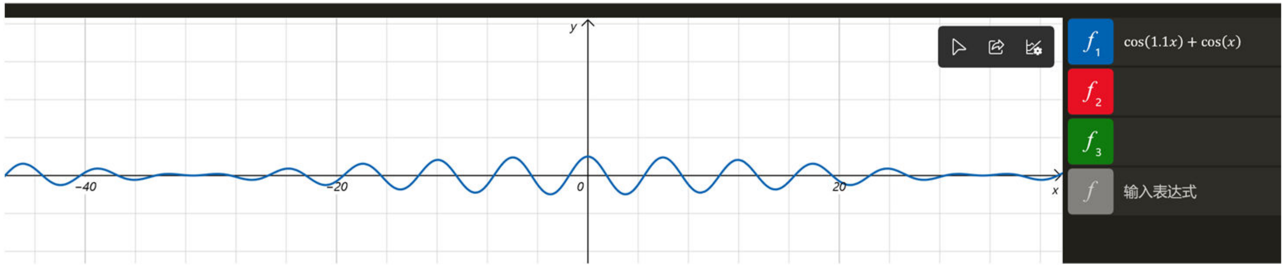


合频振动是慢振动对快振动的微扰。

合频： $A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+ A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$

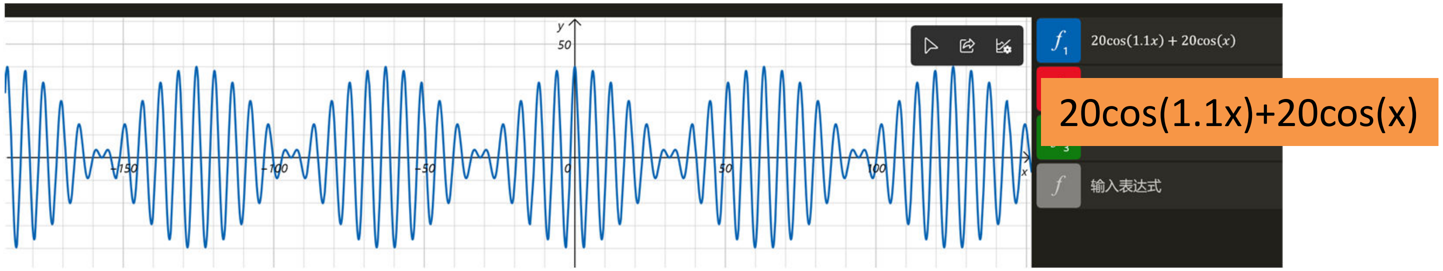
III. 两个振动的振幅相当，但频率差别很小: $A_1 \sim A_2,\ \omega_1 \sim \omega_2$





什么是拍频？

$A_1 \sim A_2,\ \omega_1 \sim \omega_2$



合振动 $x = x_1 + x_2 = A\cos\omega_{10}t + A\cos\omega_{20}t$

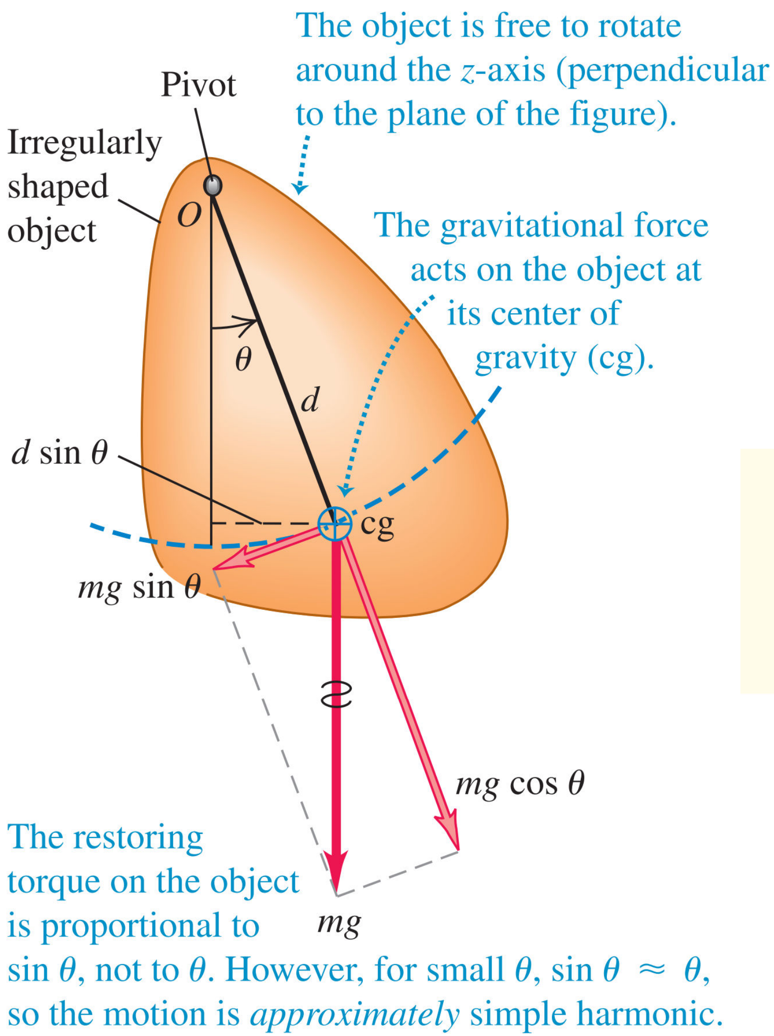
$$= 2A\cos\frac{\omega_{20}-\omega_{10}}{2}t\cos\frac{\omega_{20}+\omega_{10}}{2}t$$

设 $\omega_{10}+\omega_{20} >> \left|\omega_{10}-\omega_{20}\right|$

$\cos\frac{\omega_{20}-\omega_{10}}{2}t$ 随 t 变化慢 → 拍频= $\omega_{20}-\omega_{10}$

$\cos\frac{\omega_{20}+\omega_{10}}{2}t$ 随 t 变化快

复摆（physical pendulum）



$$\tau_z = -(mg)(d\sin\theta)$$

振幅很小时，Sinθ ~ θ，近似为简谐运动：

$$\tau_z = -(mgd)\theta$$

角频率为：

Angular frequency of physical pendulum, small amplitude

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

Mass

Acceleration due to gravity

Distance from rotation axis to center of gravity

Moment of inertia

周期为：

Period of physical pendulum, small amplitude

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

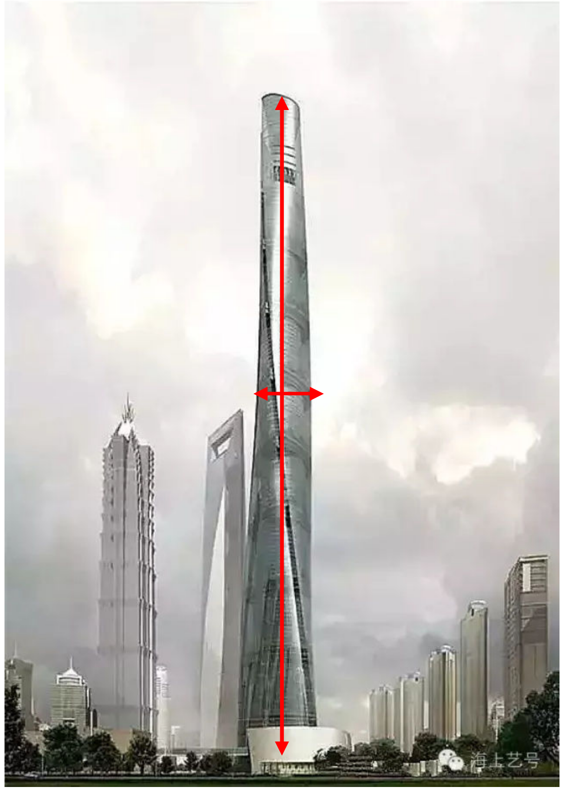
Moment of inertia

Distance from rotation axis to center of gravity

Mass

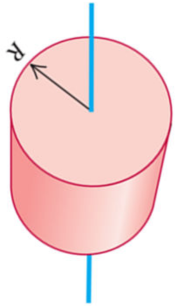
Acceleration due to gravity

上海中心的高度达到了632米，总共有128层，重量达到85万吨



高：2d=632米
直径：2R ~ 60米

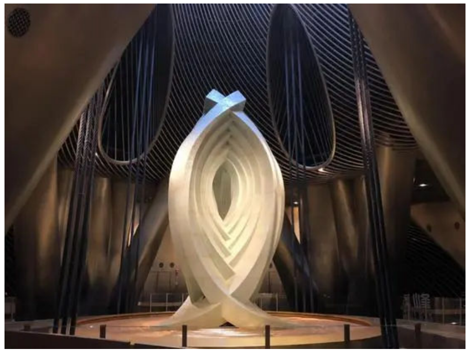
空心圆柱



$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgd}{\frac{1}{2}MR^2}} = \sqrt{\frac{2gd}{R^2}} \sim 2.6$$

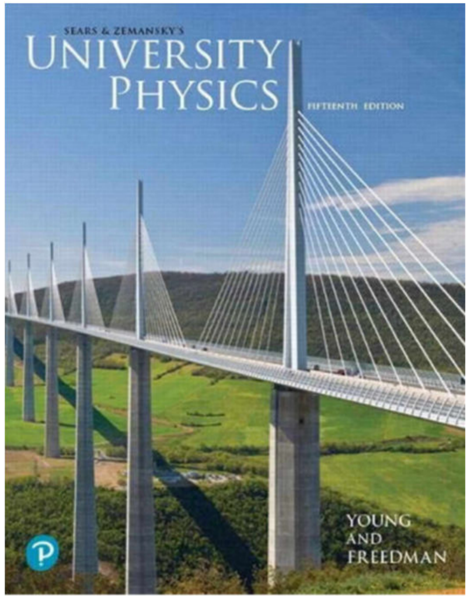
$$f = \frac{\omega}{2\pi} \sim 0.4\ Hz$$



上海中心大厦的阻尼器 - “上海慧眼”，类似于一个巨型复摆，重达1000吨，安装在大厦的倒数第三和第四层，距离地面足有583米。

普通物理I PHYS1181 第14讲

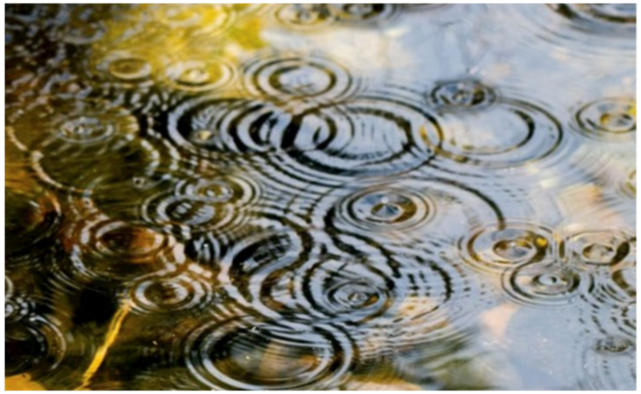
机械波 Mechanical Waves



波动-振动状态的传递

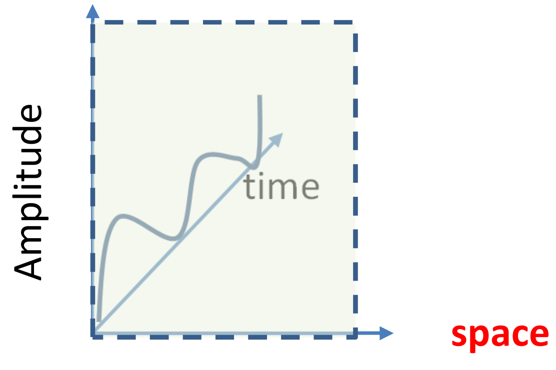
波动：振动在空间内的传播，是传播着的振动。

- 振动是波动的基础，波动是振动的传播。
  常见的波有：机械波，电磁波，...



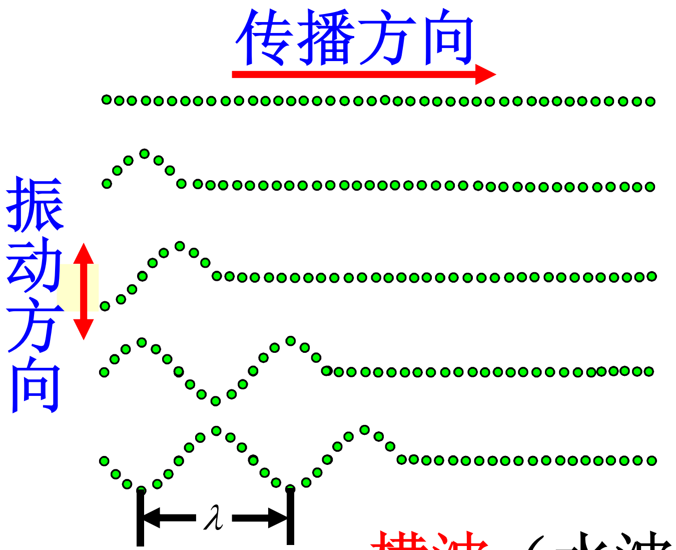
- 机械振动在连续介质内的传播形成机械波
  机械波产生的两个条件：波源，介质

机械波的分类：振动与传播方向

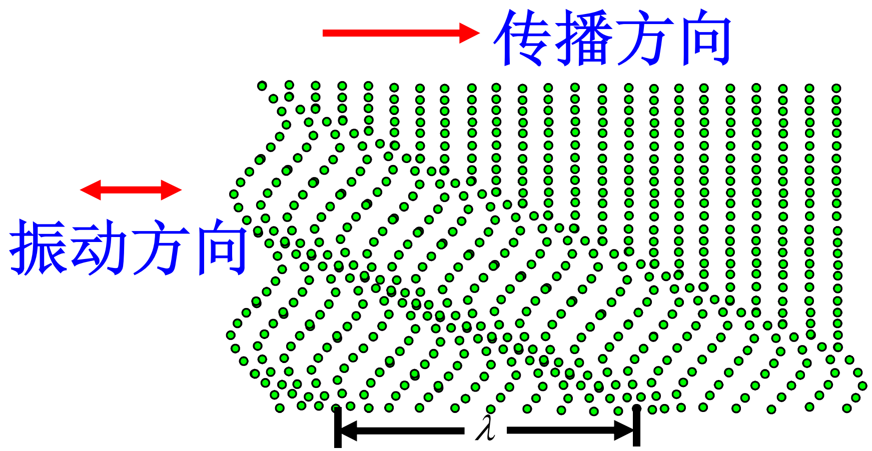


横波：质元振动方向与波的传播方向垂直

纵波：质元振动方向与波的传播方向平行



横波（水波）



纵波（声波）

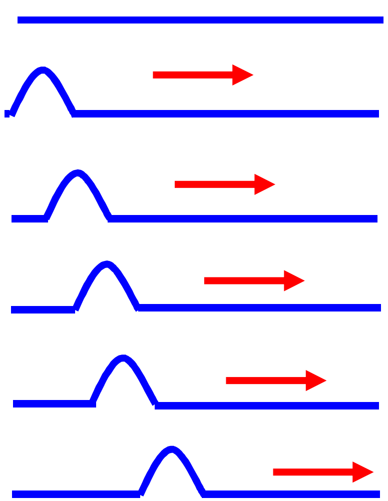
https://www.youtube.com/watch?v=ewsx9Gnh5eM

机械波的三大特点

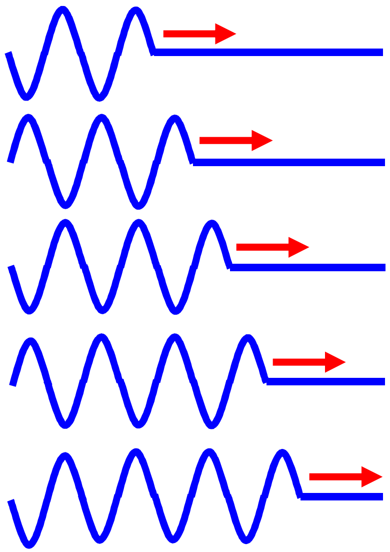
1. 机械波在介质中传播，传播速度为 v；
2. 介质本身不传播，介质中的质点围绕它们的平衡位置来回振动；
3. 机械波传播的本质是能量的传播。

机械波的其他分类：传播形式

行波

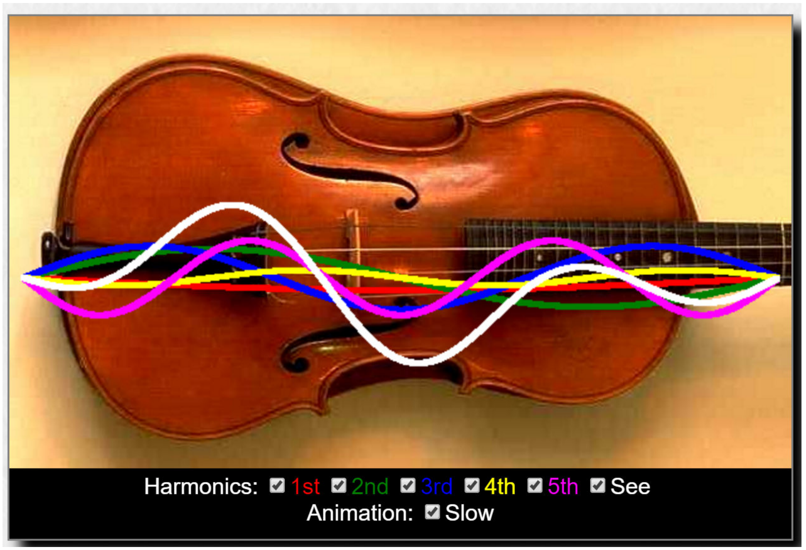


脉冲波



连续波

驻波



机械波的其他分类：波前形状

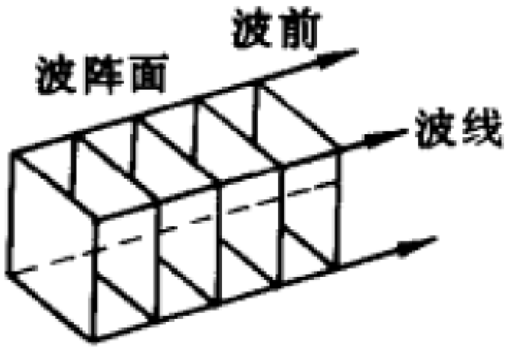
波线： 用有向直线表示波的传播方向

波阵面：某一时刻波的前方达到的相位相同的各点构成的连续的面，又称波前 **(wave front)**

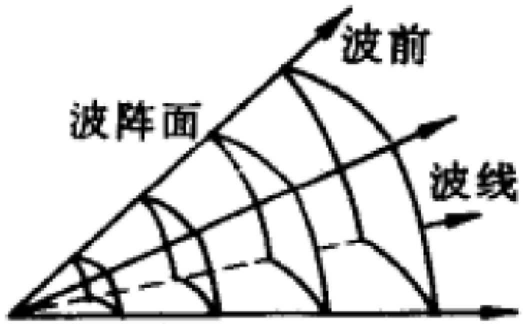
各向同性介质中，波线与波阵面垂直

- 若波阵面为平面，称为平面波
- 若波阵面为球面，称为球面波
- 若波阵面为柱面，称为柱面波

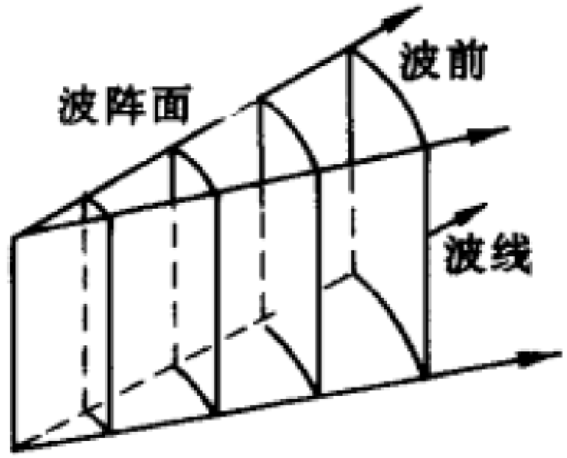
机械波的其他分类：波前形状



平面波



球面波



柱面波

波速**v**：波阵面沿波线的推进速度（相位传播）

$$t,\Psi \xrightarrow[\Delta S]{} t+\Delta t,\Psi$$

$$v=\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

机械波的速度决定于媒质的弹性和密度

平面波的数学描述

一维方向传播，横波

设平面波沿 x 轴正向传播，质元沿 y 轴振动

设坐标原点的质元振动 $$y_o = f(t)$$

则 t 时刻 x 处质元振动 $$y = f(t - \frac{x}{v})$$

此式为沿 x 轴正向传播平面波波动方程。注意其同时为空间坐标**x**与时间坐标**t**的函数。

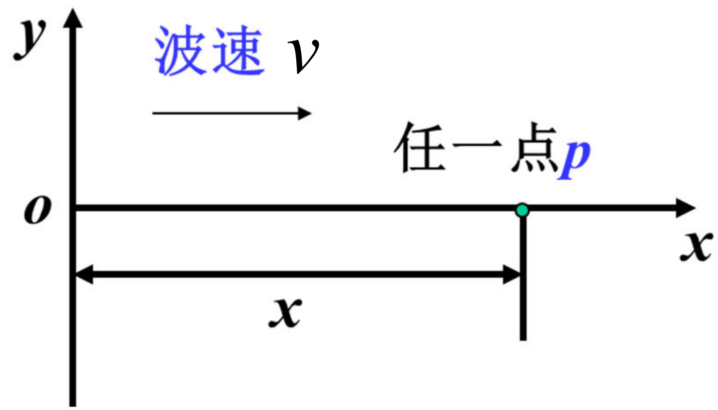
则沿 x 轴负向传播平面波波动方程为：$$y = f(t + \frac{x}{v})$$

平面简谐波

简谐波：波源作简谐振动，在波传到的区域，媒质中的质元均作简谐振动。

设 $y_o = A\cos(\omega t + \varphi)$

求 *p* 点 $y(x,t)$



假设：媒质无吸收(质元振幅均为*A*)

图中*p*点比*o*点落后时间：$\dfrac{x}{v}$

则 $\boxed{y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \phi\right]}$ 向右传播的一维平面简谐波

平面简谐波

$$\boxed{y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \phi\right]}$$

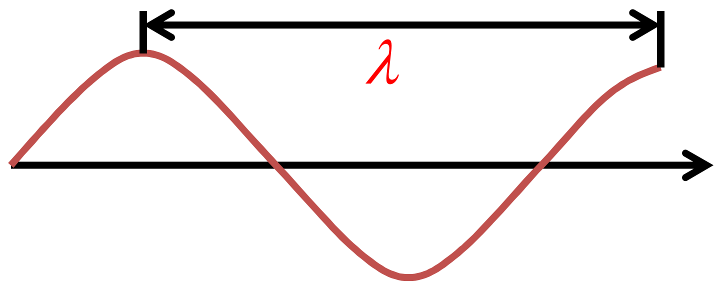
对t微分 $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi\right] = -\omega^2 y$$ 任何一点都在做简谐振动

对x微分 $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} A cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi\right] = -\frac{\omega^2}{v^2} y$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

描述简谐波的物理量

1. 空间



波长：两相邻同相点间的距离 λ

波数：$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ 即单位长度上波的相位变化

2. 时间

周期 T：波前进一个波长的距离所需的时间。

频率 f 和角频率 ω： $f = 1/T;\ \ \omega = 2\pi f$

3. 波速

等相位面沿波线向前推进的速度，即波速 v (单位时间波所传过的距离)。

波速的定义：$v = \dfrac{\lambda}{T} = \lambda f = \dfrac{\omega}{k}$

波动式的其他表达式

$$y = A\cos\left[2\pi f\left(t \mp \frac{x}{v}\right) + \varphi\right] \qquad (\omega = 2\pi f)$$

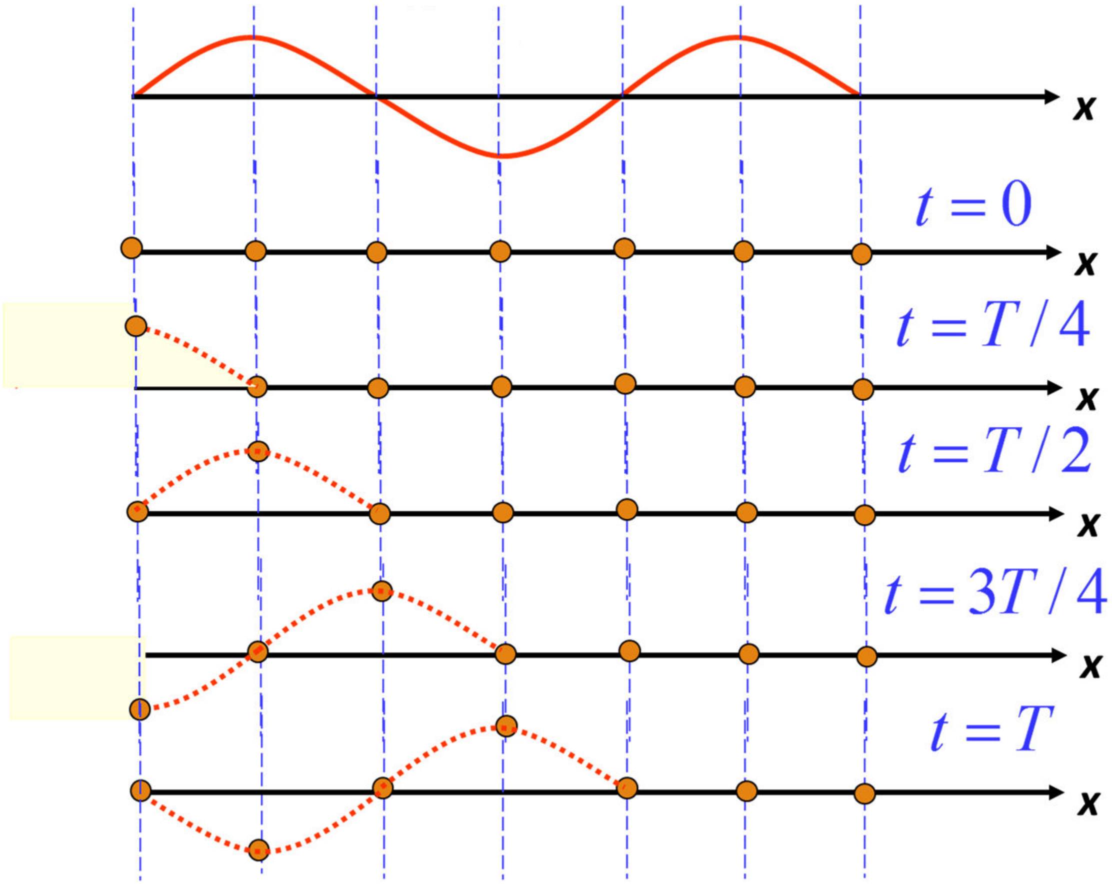
$$= A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right] \qquad \left(f = \frac{1}{T}, \lambda = vT\right)$$

$$= A\cos\left[k(vt \mp x) + \varphi\right] \qquad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda}, v = \frac{\lambda}{T}\right)$$

$$= A\cos\left[\omega t \mp kx + \varphi\right] \qquad \left(kv = \frac{2\pi}{T}\right)$$

简谐波表达式的图像

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \qquad (f = \frac{1}{T}, \lambda = vT)$$



一维简谐波表达式的物理意义

由 $y(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ 从几方面讨论

a. 固定 x，　$(x=x_0)$　$y(x_0,t) = A\cos(\omega t - kx_0)$

b. 固定 t，　$(t=t_0)$　$y(x,t_0) = A\cos(\omega t_0 - kx)$

c. 如认定某一相位，即令 $(\omega t-kx)$=常数

相速度为：
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{k} = v$$

d. 表达式也反映了波是振动状态的传播

$y(x+\Delta x, t+\Delta t) = y(x,t)$　其中 $\Delta x = v\Delta t$

一维简谐波表达式的物理意义

e. 表达式还反映了波的时间、空间双重周期性

T 时间周期性　　　λ 空间周期性

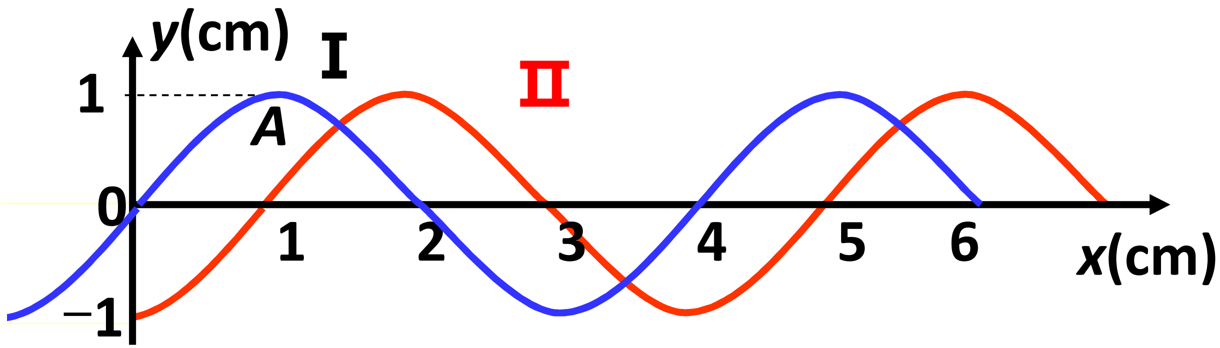
$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \frac{\omega}{k}$$

➢注：相位差和波程差的关系

$$\boxed{\Delta\phi = \pm 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda}}$$

例题

已知 t=0时的波形曲线为I，波沿ox方向传播，经t=1/2s后波形变为曲线II。已知波的周期T>1s，试根据图中绘出的条件求出波的表达式，并求A点的振动式。



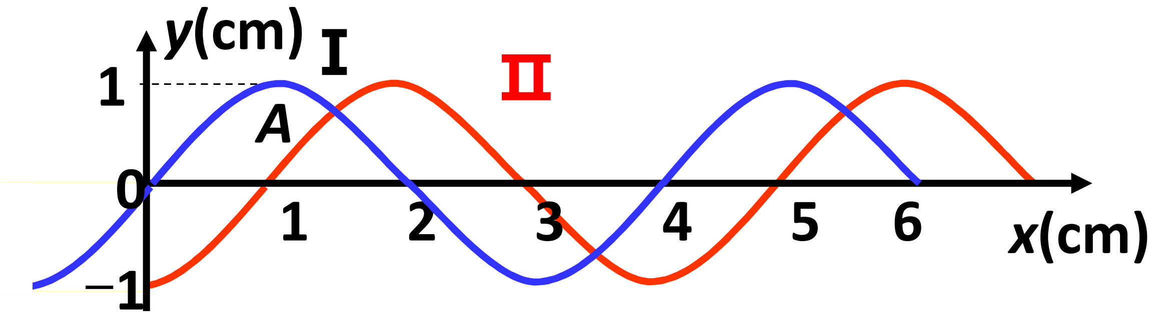
解： $A = 0.01\text{m}$

$\lambda = 0.04\text{m}$

波速：

$$v = \frac{x_1 - x_0}{t} = \frac{0.01}{1/2} = 0.02\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \quad T = \frac{\lambda}{v} = \frac{0.04}{0.02} = 2\text{s} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi\,\text{s}^{-1}$$

例题



原点振动：$y_0 = A\cos(\omega t + \varphi)$

初始条件：$0 = A\cos\varphi$

$$\rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

原点振动速度 $v_{y0} = -\omega A\sin\varphi < 0$ $\sin\varphi > 0$ $\rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$

原点的振动式 $y_0 = 0.01\cos(\pi t + \dfrac{\pi}{2})$

Homework

1. 将一劲度系数为k的轻质弹簧上端固定悬挂起来,下端挂一质量为m的小球,平衡时弹簧伸为b。试写出以此平衡位置为原点的小球的动力学方程,从而证明小球将作简谐运动并求出其振动周期。若它的振幅为A,它的总能量是否还是$(1/2)kA^2$?(总能量包括小球的动能和重力势能以及弹簧的弹性势能两种势能均取平衡位置为势能零点。)

2. 如图所示,一块均匀的长木板质量为m,对称地平放在相距l=20cm的两个滚轴上。如图所示,两滚轴的转动方向相反,已知滚轴表面与木板间的摩擦系数为μ=0.5。今使木板沿水平方向移动一段距离后释放,证明此后木板将作简谐运动并求其周期。

Homework

3. 质量为m=121g的水银装在U形管中,管截面积S=0.30cm^2。当水银面上下振动时,其振动周期T是多大?水银的密度为13.6g/cm^3。忽略水银与管壁的摩擦。

4. 一细圆环质量为m,半径为R,挂在墙上的钉子上。求它的微小摆动的周期。

5. 一质点同时参与两个在同一直线上的简谐运动,其表达式为

$$x_1 = 0.04\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$x_2 = 0.03\cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right)$$

   试写出合振动的表达式。