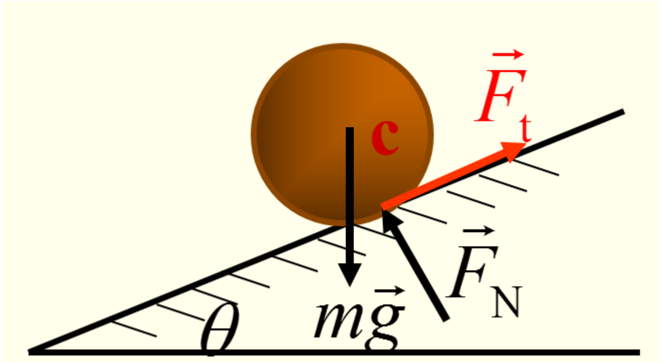
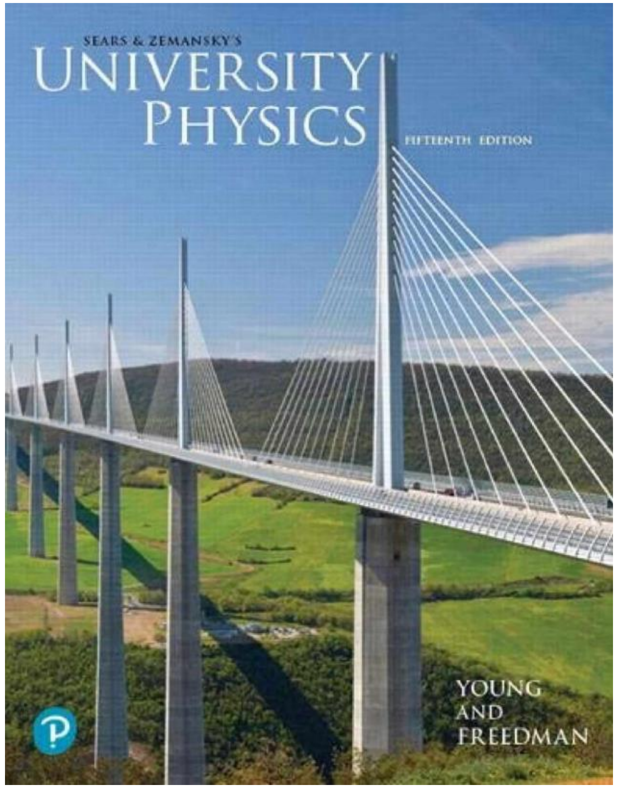
例题（平动+转动）

一匀质圆球(r)从静止开始沿一粗糙斜面纯滚动而下，斜面倾角为θ，球从上端滚到下端球心高度相差为h，计算小球滚到下端时质心的速度和转动角速度。



普通物理I PHYS1181 第 11 讲

万有引力
Gravitation



本节课：

A. 牛顿万有引力定律

a) 引力和重力

b) 引力势能

B. 万有引力的应用

a) 卫星轨道

b) 黑洞

Newton's law of gravitation: *Any* two particles with masses m_1 and m_2, a distance r apart, attract each other with forces inversely proportional to r^2. These forces form an action–reaction pair and obey Newton's third law. When two or more objects exert gravitational forces on a particular object, the total gravitational force on that individual object is the vector sum of the forces exerted by the other objects. The gravitational interaction between spherical mass distributions, such as planets or stars, is the same as if all the mass of each distribution were concentrated at the center. (See Examples 13.1–13.3 and 13.10.)

$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad (13.1)$$

Gravitational force, weight, and gravitational potential energy: The weight w of an object is the total gravitational force exerted on it by all other objects in the universe. Near the surface of the earth (mass m_E and radius R_E), the weight is essentially equal to the gravitational force of the earth alone. The gravitational potential energy U of two masses m and m_E separated by a distance r is inversely proportional to r. The potential energy is never positive; it is zero only when the two objects are infinitely far apart. (See Examples 13.4 and 13.5.)

$$w = F_g = \frac{Gm_Em}{R_E^2} \quad (13.3)$$

(weight at earth's surface)

$$g = \frac{Gm_E}{R_E^2} \quad (13.4)$$

(acceleration due to gravity at earth's surface)

$$U = -\frac{Gm_Em}{r} \quad (13.9)$$

Orbits: When a satellite moves in a circular orbit, the centripetal acceleration is provided by the gravitational attraction of the earth. Kepler's three laws describe the more general case: an elliptical orbit of a planet around the sun or a satellite around a planet. (See Examples 13.6–13.9.)

$$v = \sqrt{\frac{Gm_E}{r}}$$

(speed in circular orbit)

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{Gm_E}}$$

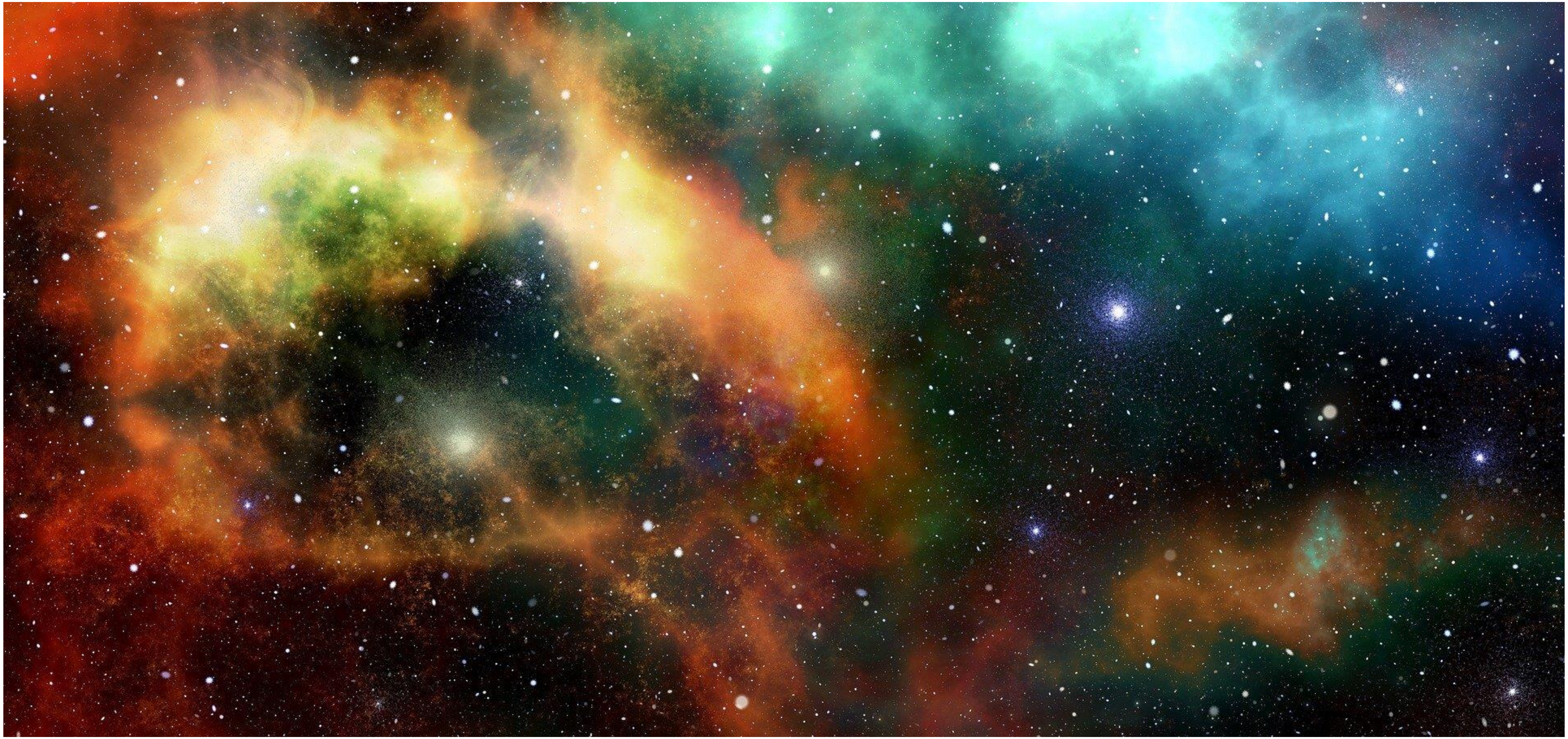
(period in circular orbit)

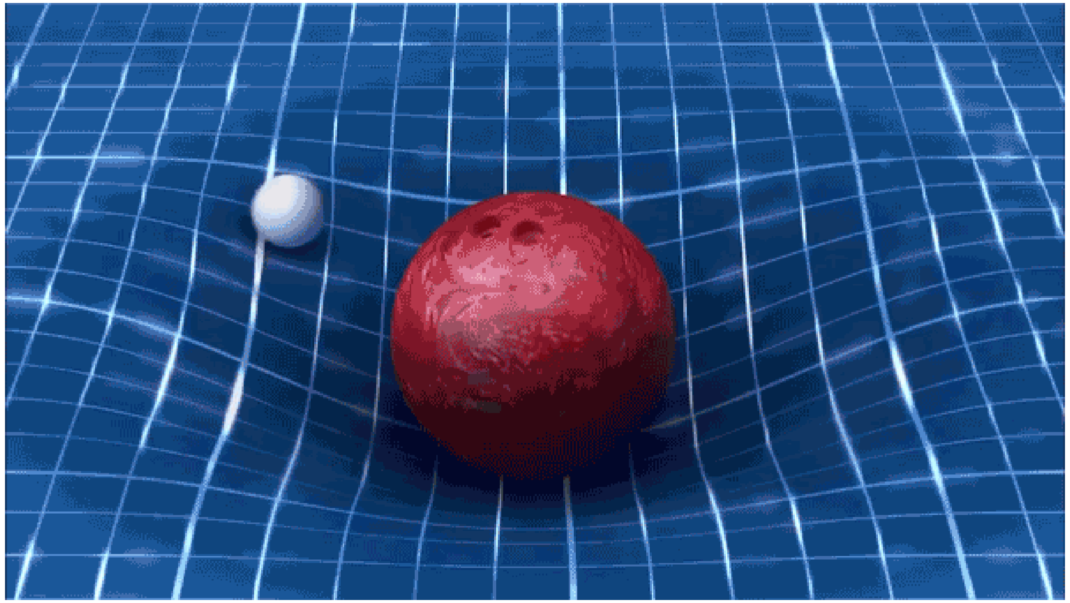
Black holes: If a nonrotating spherical mass distribution with total mass M has a radius less than its Schwarzschild radius R_S, it is called a black hole. The gravitational interaction prevents anything, including light, from escaping from within a sphere with radius R_S. (See Example 13.11.)

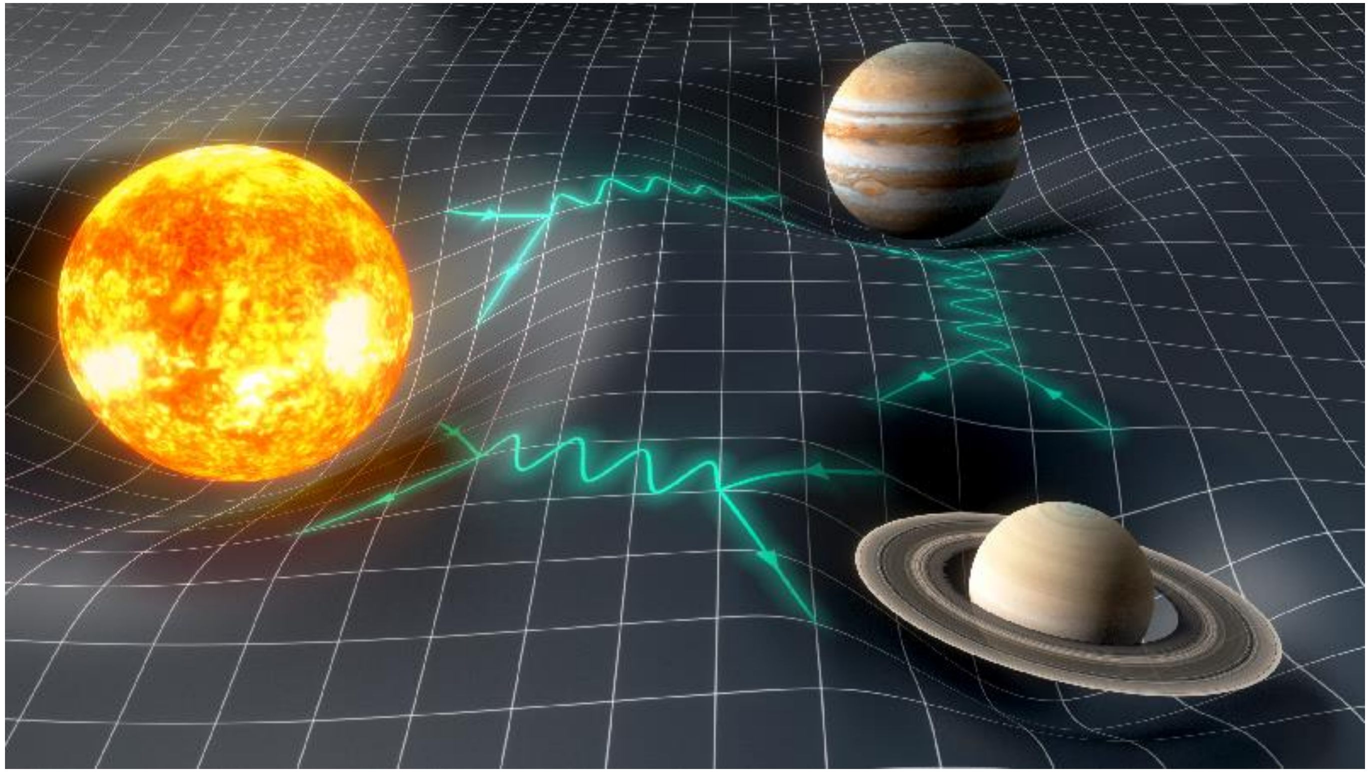
$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

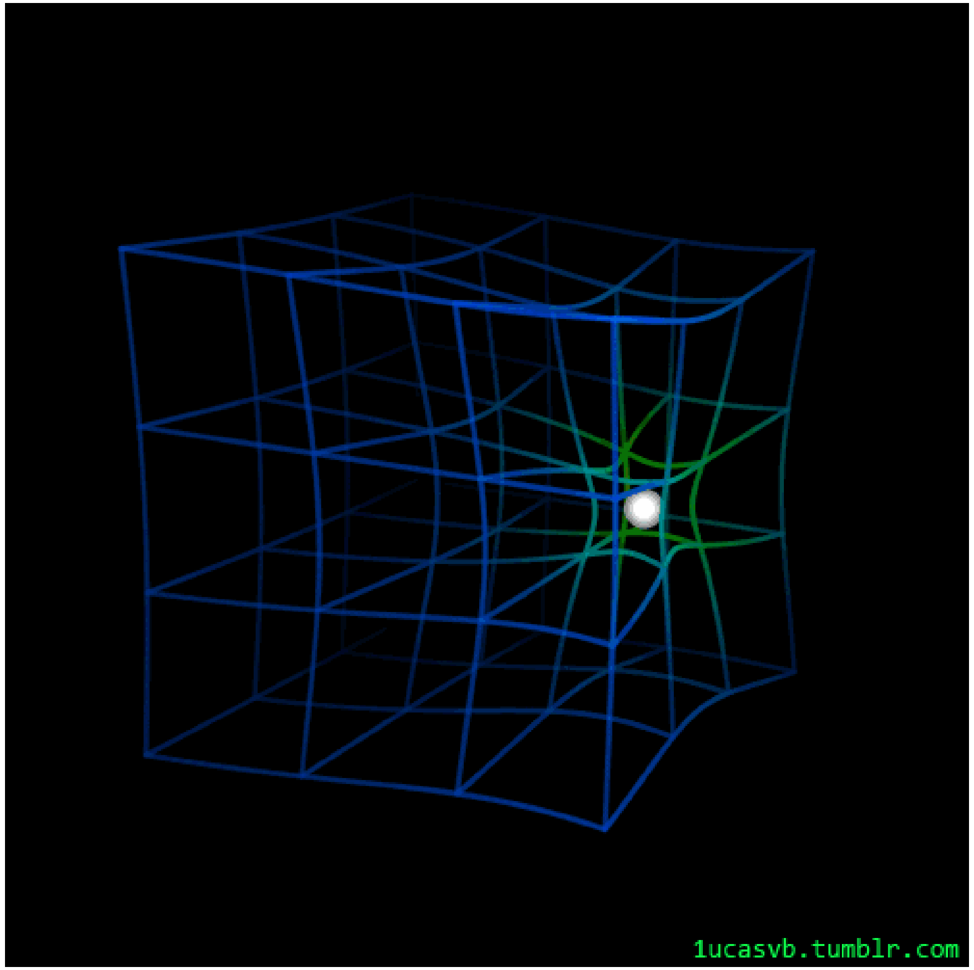
(Schwarzschild radius)

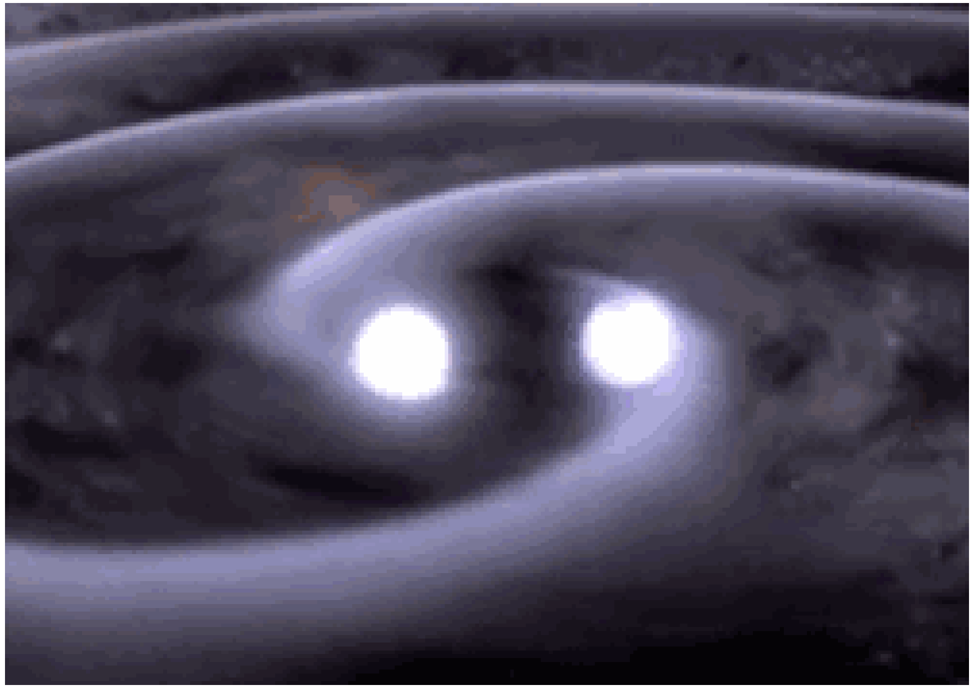
星系由引力形成 Gravitation forms the galaxy








1ucasvb.tumblr.com



A. 牛顿万有引力定律

NEWTON'S LAW OF GRAVITATION **Every particle of matter in the universe attracts every other particle with a force that is directly proportional to the product of the masses of the particles and inversely proportional to the square of the distance between them.**

宇宙中的每个物质粒子都吸引着每个其他粒子，吸引力与粒子质量的乘积成正比，与粒子之间距离的平方成反比。

Newton's **law of gravitation:**
Magnitude of attractive gravitational force between any two particles

$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

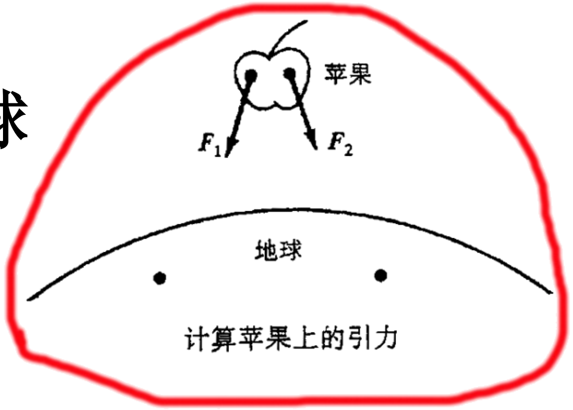
Gravitational constant (same for any two particles)
Masses of particles
Distance between particles

引力的计算

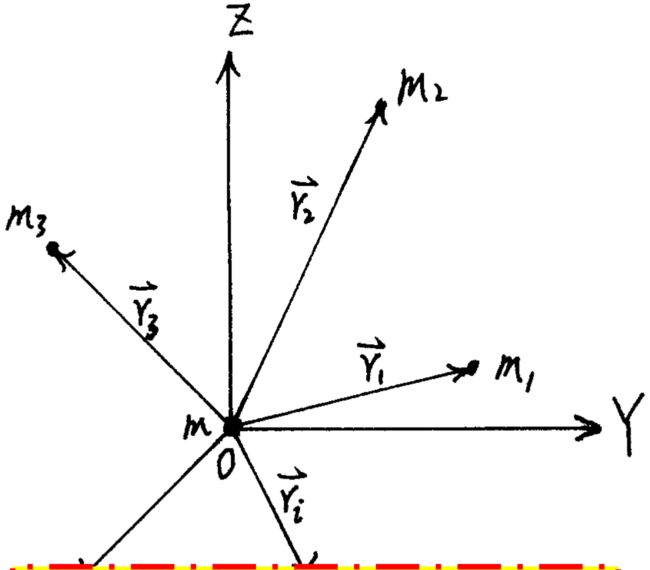
1) 多质点体系的万有引力

牛顿的万有引力定律公式是对两个**质点**而言的。牛顿在发展引力理论过程中，重要的一步是把月球运动和落体运动统一起来。在这个分析中，一个关键的问题是牛顿认为地球表面落体运动的加速度可以写为：$g = G\frac{M_{地}}{R^2}$，其中R是地球半径。

这里有一个很大的疑问，为什么能把地球和落体间的距离看为R？如果说在讨论月球运动时，把地球和月球看作质点是一个足够好的近似，那么讨论落体运动时，把地球看作质点显然是不合理的。为了研究这个问题，我们必须来讨论一下多质点体系的引力问题。



现在我们先来讨论一种简单情况。在原点有一质量为**m**的质点，空间分布着质量分别为m_1，m_2，m_3，……，m_i的若干个质点，它们的位置矢量分别为$\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3,\cdots\cdots\vec{r}_i$。为了求质点 **m** 所受到的引力，必须把引力公式作些推广。根据引力公式可知：



引力的线性叠加性

第一个质点对**m**的引力为 $\vec{F}_1 = G\dfrac{mm_1}{r_1^{\,2}}\cdot\dfrac{\vec{r}_1}{r_1}$

第二个质点对**m**的引力为 $\vec{F}_2 = G\dfrac{mm_2}{r_2^{\,2}}\cdot\dfrac{\vec{r}_2}{r_2}$

…… ……

第***i*** 个质点对**m**的引力为 $\vec{F}_i = G\dfrac{mm_i}{r_i^{\,2}}\cdot\dfrac{\vec{r}_i}{r_i}$

因此，可以自然地认为，**m**所受到的总力为

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots\cdots + \vec{F}_i$$

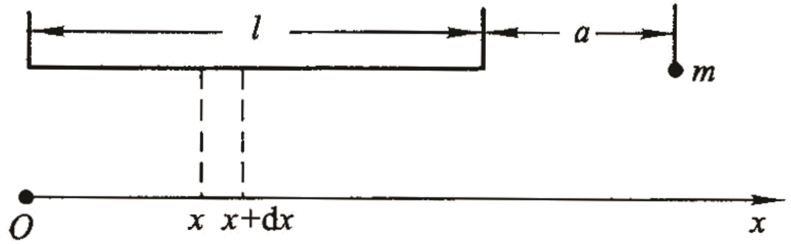
$$= \sum_I G\frac{mm_i}{r_i^{\,2}}\cdot\frac{\vec{r}_i}{r_i}$$

2) 连续体的万有引力

“微元”

以均质细杆对质点的引力为例。

细杆质量为M，长为l，距细杆的一端 a 处有一质量为m的质点，计算细杆对质点m的引力。



把细杆分成许多小段(微元)，每一小段可看作质点。细杆上 x 至 $x+dx$ 的一小段可看作质量为Mdx/l的质点，对质点m的引力为

$$dF = -\frac{GMmdx}{l(l-x+a)^2}$$

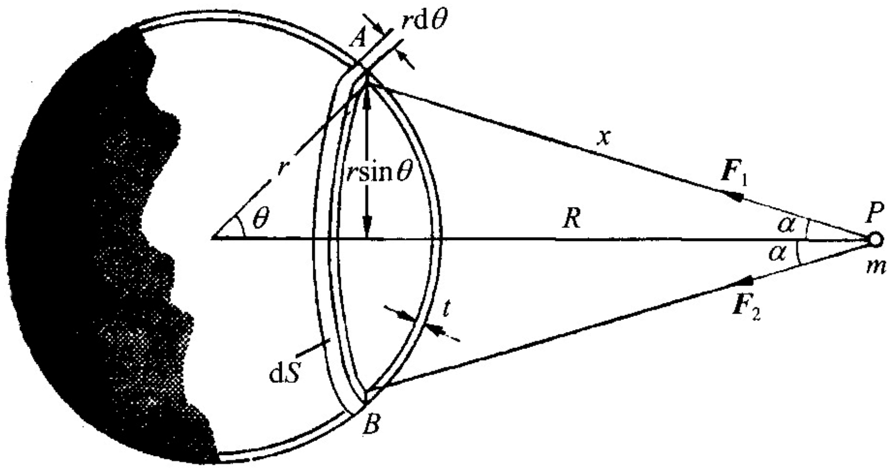
求合力只需计算代数和

$$F = \int dF = -\int_0^l \frac{GMmdx}{l(l-x+a)^2} = -\frac{GMm}{l}\left.\frac{1}{l-x+a}\right|_0^l = -\frac{GMm}{l}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{l+a}\right)$$

结果是 $F = -GMm/a(l+a)$。

均匀球壳的万有引力

考虑一密度均匀的球壳，它的厚度 **t** 比它的半径 **r** 小得多。我们要求出它对球壳外一质量为 ***m*** 的质点 ***P*** 的引力。

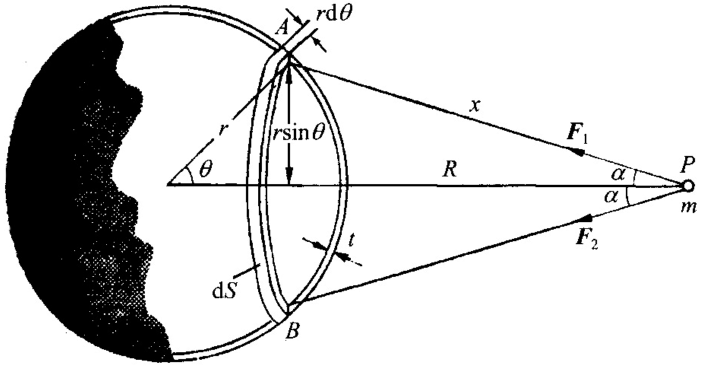


设在球壳**A**点处的一小块对 ***m*** 的引力为$\vec{F}_1$，由球壳的对称性，可以找到与 ***A*** 相对称的 ***B*** 点，该处的一小块对 ***m*** 的引力为$\vec{F}_2$。通过把球壳分成这样一对一对的小块，所有作用在 ***m*** 上的力的竖直分量都成对地相互抵消了，只需考虑水平分量。

考虑球壳上一环带，它长为$2\pi(r\sin\theta)$，宽为$rd\theta$，厚为t。因此，它的体积为 $dV=2\pi tr^2\sin\theta d\theta$ 。设密度为ρ，则环带的质量为 $dM=\rho dV$ $=2\pi t\rho r^2\sin\theta d\theta$ 。

dM对位于 ***P***点处的质量 ***m*** 所施的力是水平的，其值为

$$dF = G\frac{mdM}{x^2}\cos\alpha = 2\pi tG\rho mr^2\frac{\sin\theta\, d\theta}{x^2}\cos\alpha$$



其中 **x**、$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\theta}$之间满足关系

$$\boxed{\cos\alpha} = \frac{R - r\cos\theta}{x}$$

再根据余弦定理 $x^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta$

即 $$\boxed{r\cos\theta} = \frac{R^2 + r^2 - x^2}{2R}$$

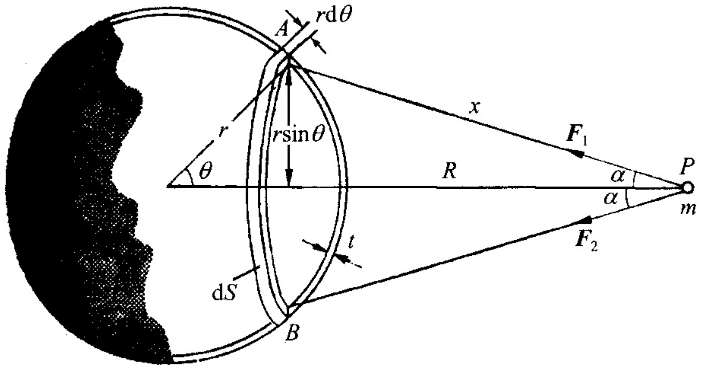
又，对余弦定理进行微分，得 $2xdx = 2Rr\sin\theta\, d\theta$

即 $$\boxed{\sin\theta\, d\theta} = \frac{x}{Rr}dx$$

消去 $\boldsymbol{\theta}$与 $\boldsymbol{\alpha}$，得 $$dF = (\frac{\pi Gt\rho mr}{R^2})(\frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1)dx$$

这就是环带**ds**的物质作用在质点**m**上的引力。

$$dF=(\frac{\pi G t\rho m r}{R^2})(\frac{R^2-r^2}{x^2}+1)dx$$

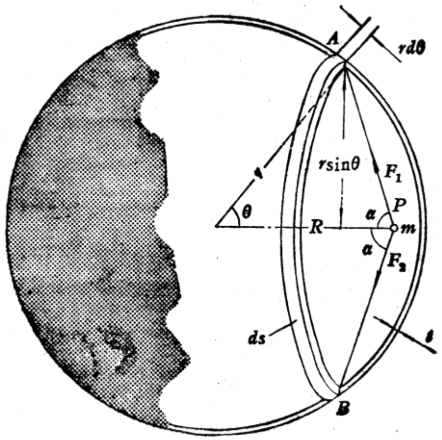


整个球壳的作用即为前式对所有环带求和，亦即对变量**x**求遍及整个球壳的积分。因为**x**的范围是从最小值***R-r***到最大值***R+r***，

$$\int_{R-r}^{R+r}(\frac{R^2-r^2}{x^2}+1)dx=4r$$

故合力为 $F=\int_{R-r}^{R+r}dF=G\frac{(4\pi r^2\rho t)m}{R^2}=G\frac{Mm}{R^2}$

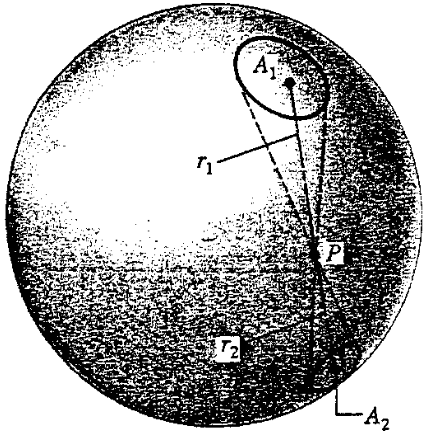
这个结果表明：**一个密度均匀的球壳对球壳外一质点的引力，等效于它的所有质量都集中于它的中心时的引力。**



对球壳内部的引力

$$\int_{r-R}^{r+R}\left(\frac{R^2-r^2}{x^2}+1\right)dx=0$$

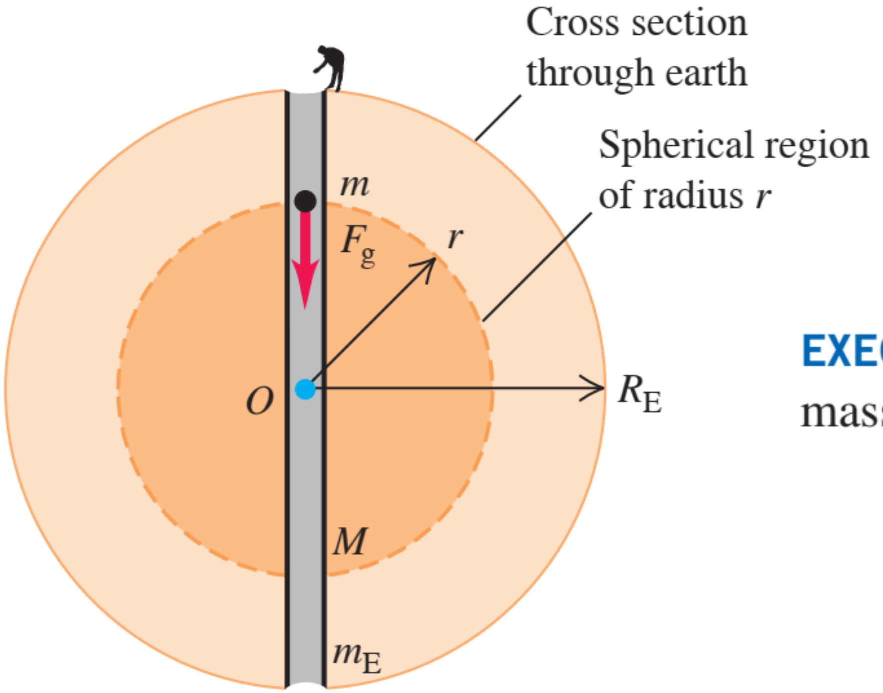
球壳对内部任一质点的引力为零。



球壳内点质量上力的确定

这个结果非常有意义。

Figure **13.25** A hole through the center of the earth (assumed to be uniform). When an object is a distance r from the center, only the mass inside a sphere of radius r exerts a net gravitational force on it.



EXECUTE The ratio of the mass M of the sphere of radius r to the mass m_E of the earth is

$$\frac{M}{m_E} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R_E^3} = \frac{r^3}{R_E^3} \qquad \text{so} \qquad M = m_E \frac{r^3}{R_E^3}$$

The magnitude of the gravitational force on m is then

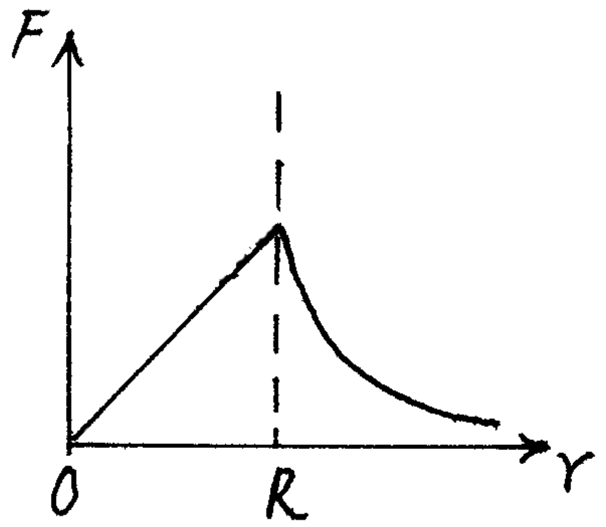
$$F_g = \frac{GMm}{r^2} = \frac{Gm}{r^2}\left(m_E \frac{r^3}{R_E^3}\right) = \frac{Gm_E m}{R_E^3} r$$

均匀球体的万有引力

对于半径为***R***，密度为ρ的均匀球体，可以推出万有引力公式：

$$F = G\frac{4}{3}\pi R^3 \rho m / r^2 = G\frac{m\frac{4}{3}\pi R^3\rho}{r^2}，\quad \boldsymbol{r > R}$$

$$F = G\frac{4}{3}\pi r^3 \rho m / r^2 = Gm\frac{4}{3}\pi r\rho，\quad \boldsymbol{r < R}$$



重力加速度的变化

根据万有引力定律，显然重力加速度 **g** 应随高度而改变，亦即随离地球中心的距离而改变。

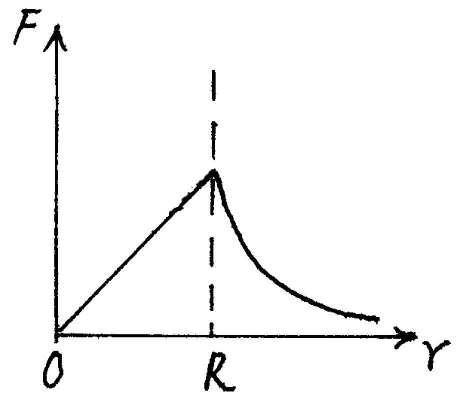
将$F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$的两边微分，得 $dF = -2G\dfrac{m_1 m_2}{r^3}dr$

两式相除，得 $\dfrac{dF}{F} = -2\dfrac{dr}{r}$

F 相对变化为 ***r*** 相对变化的两倍；负号表示引力随距离增大而减小。

若设***m***为物体的质量，则地球对物体的引力大小为 $F = mg$ ，同样求微商，得到：$\dfrac{dF}{F} = \dfrac{dg}{g} = -2\dfrac{dr}{r}$

在地球内部 **g** 值也变小，深度越大 **g** 值越小，在地心处重力加速度为 **0**。



a3) 地球表面的重力w和重力加速度g

Gravitational constant

Mass of the earth

Weight of an object at the earth's surface ...

... equals gravitational force the earth exerts on object.

$$w = F_g = \frac{Gm_E m}{R_E^2}$$

Mass of object

Radius of the earth

Gravitational constant

Mass of the earth

Acceleration due to gravity at the earth's surface

$$g = \frac{Gm_E}{R_E^2}$$

Radius of the earth

卡文迪什探测了G的大小以后，计算了地球的质量：

$R_E = 6370\ \text{km} = 6.37 \times 10^6\ \text{m}$ and $g = 9.80\ \text{m/s}^2$, we find

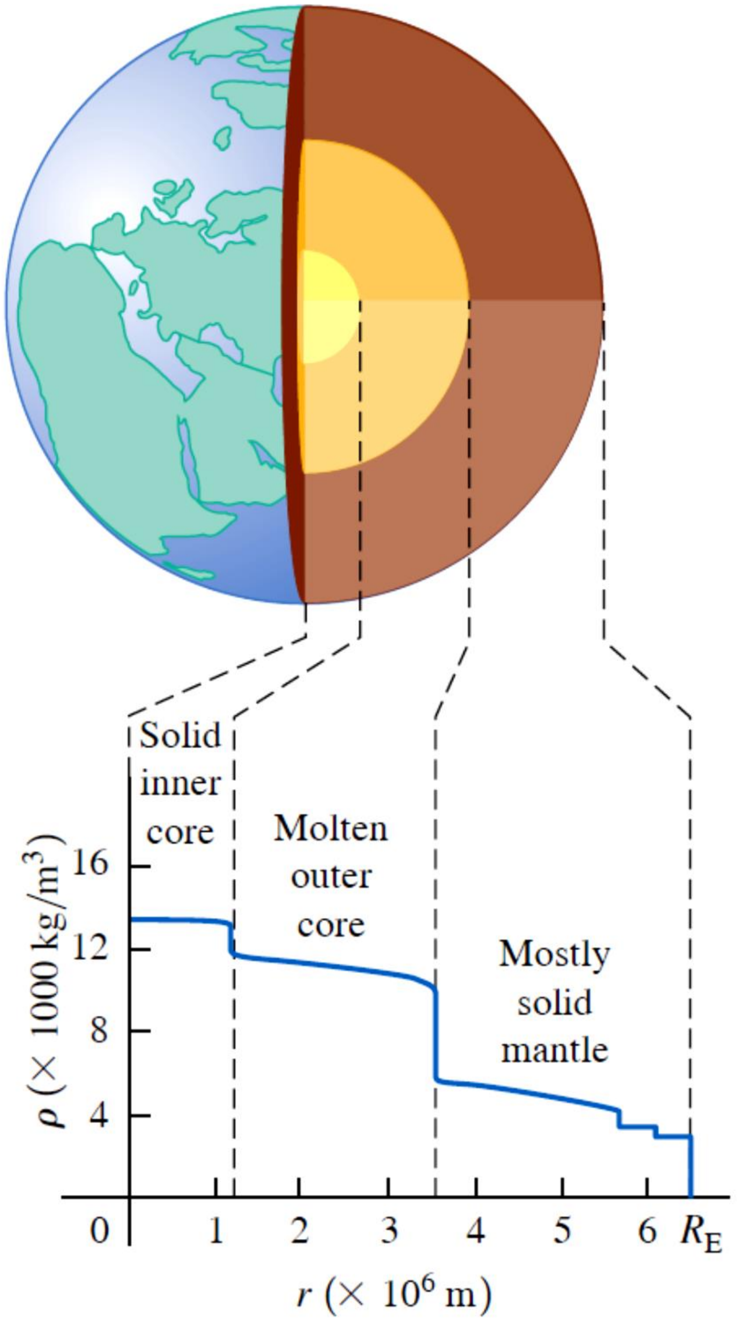
$$m_E = \frac{gR_E^2}{G} = 5.96 \times 10^{24}\ \text{kg}$$

假设地球密度是均匀的：

$$\rho = \frac{m_E}{V_E} = \frac{5.97 \times 10^{24}\ \text{kg}}{1.08 \times 10^{21}\ \text{m}^3}$$

$$= 5500\ \text{kg/m}^3 = 5.5\ \text{g/cm}^3$$

实际上地球表面岩石的密度只有大约2g/cm³，因此地球是不均匀的。



b) 万有引力势能

万有引力做功：$$W_{\text{grav}} = \int_{r_1}^{r_2} F_r \, dr$$

$$F_r = -\frac{Gm_{\text{E}}m}{r^2}$$

$$W_{\text{grav}} = -Gm_{\text{E}}m \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Gm_{\text{E}}m}{r_2} - \frac{Gm_{\text{E}}m}{r_1}$$

结论：万有引力做功大小与路径无关，只与终始位置有关。
因此万有引力是保守力。

保守力对应有势能，因此定义万有引力势能U为：

Gravitational constant

Mass of the earth

Mass of object

Gravitational potential energy (general expression)

$$U = -\frac{G m_E m}{r}$$

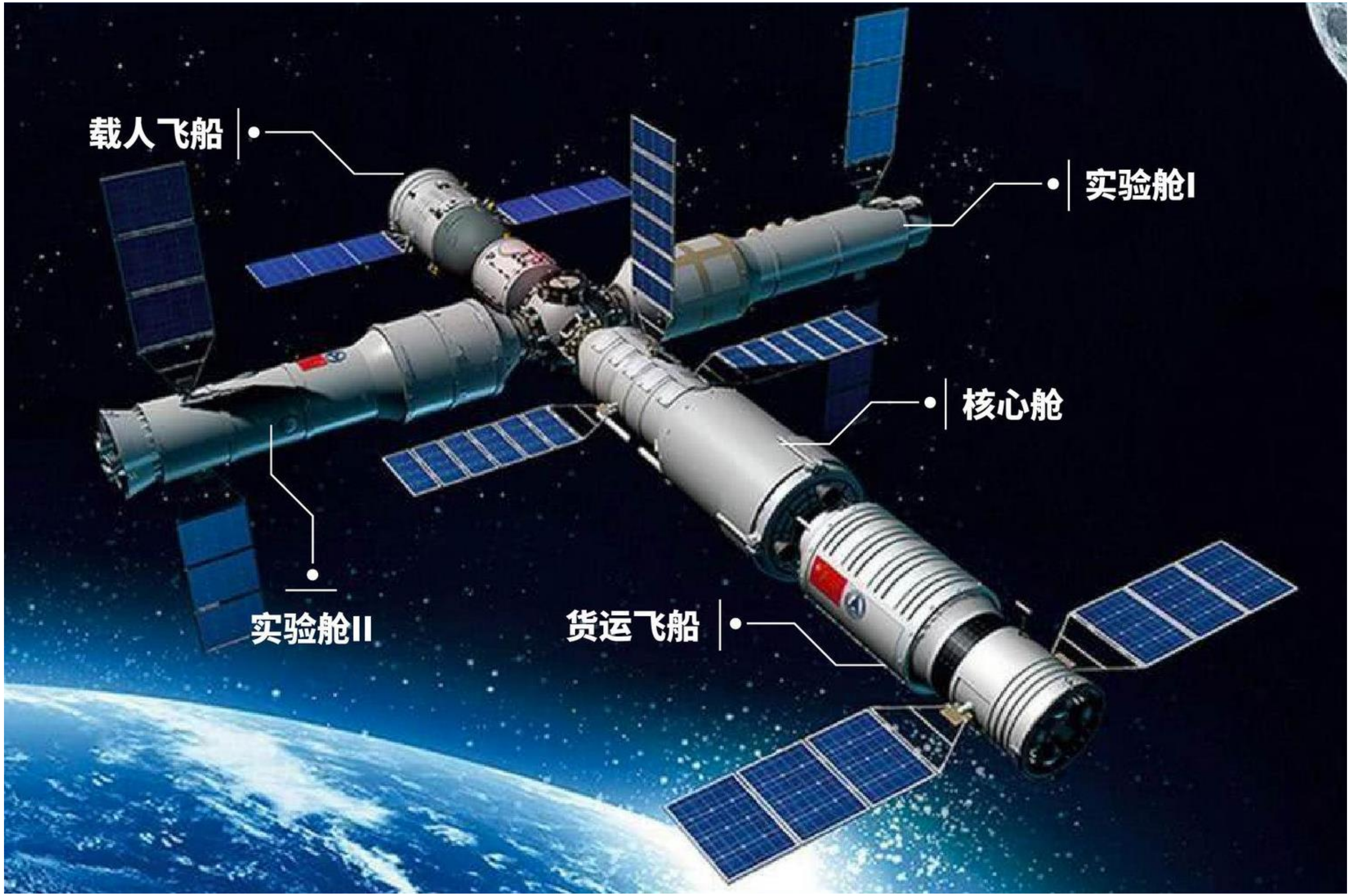
Distance of object from the earth's center

机械能守恒：$K_1+U_1=K_2+U_2$

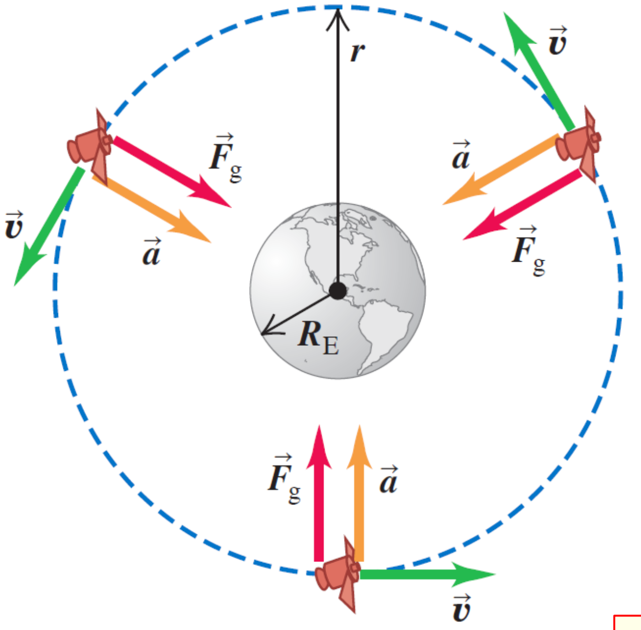
K为动能

B. 万有引力的应用

a) 卫星



卫星绕地球做圆周运动



万有引力提供向心力：

$$\frac{Gm_E m}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

卫星轨道半径和圆周运动速率的关系：

Speed of satellite in a circular orbit around the earth

Gravitational constant

Mass of the earth

$$v = \sqrt{\frac{Gm_E}{r}}$$

Radius of orbit

卫星绕地球做圆周运动的周期 *T*:

Period of a circular orbit around the earth

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{Gm_{\mathrm{E}}}} = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{Gm_{\mathrm{E}}}}$$

Radius of orbit

Orbital speed

Gravitational constant

Mass of the earth

卫星绕地球做圆周运动的总机械能 *E*:

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{Gm_{\mathrm{E}}m}{r}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}m\left(\frac{Gm_{\mathrm{E}}}{r}\right) - \frac{Gm_{\mathrm{E}}m}{r}$$

$$= -\frac{Gm_{\mathrm{E}}m}{2r} \qquad \text{(circular orbit)}$$

开普勒三定律

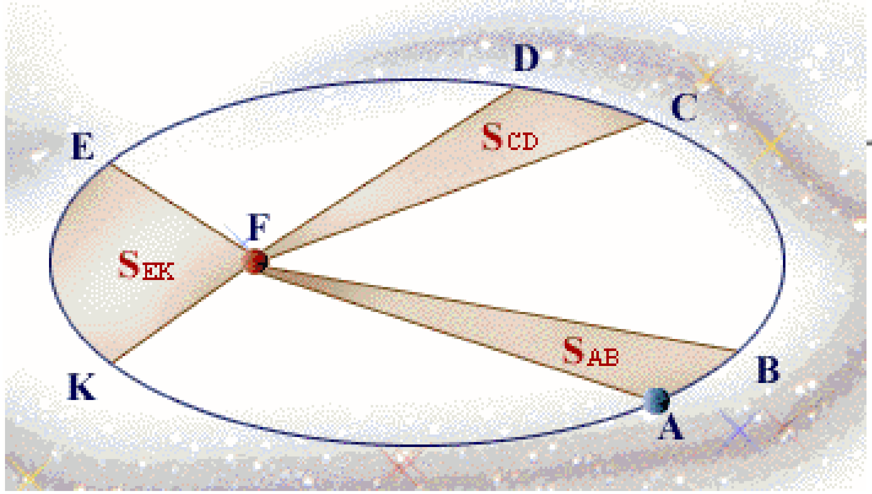
大行星围绕太阳的运动是有规律的，丹麦天文学家开普勒在分析第谷的大量观察资料后总结出了后人以他的名字命名的开普勒三定律：

第一定律（轨道定律）：行星围绕太阳的运动轨道为椭圆，太阳在椭圆的一个焦点上；

第二定律（面积定律）：行星与太阳的连线在相等的时间内扫过相等的面积；

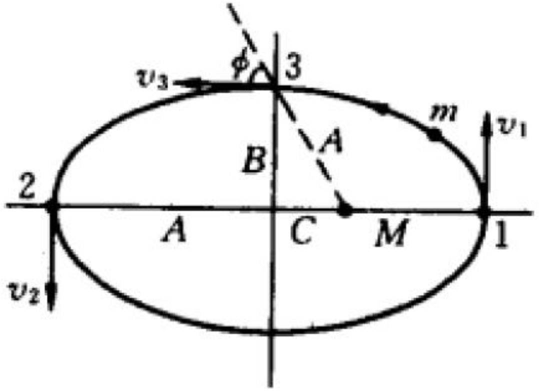
第三定律（周期定律）：各行星椭圆轨道半长轴 A 的三次方与轨道运动周期 T 的二次方之比值为相同的常量，即

$$\frac{A^3}{T^2} = k.$$



*使用守恒定律推导出开普勒第三定律

例 14 将太阳质量记为 M，行星椭圆轨道的半长轴记为 A，半短轴记为 B. 试求行星在图 4-34 中 1,2,3 处的速度大小 v_1,v_2,v_3，继而导出开普勒第三定律.



解 1,2 两处间的能量关联式和面积速度关联式分别为

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{Mm}{A-C} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{Mm}{A+C},$$

$$\frac{1}{2}v_1(A-C) = \frac{1}{2}v_2(A+C),$$

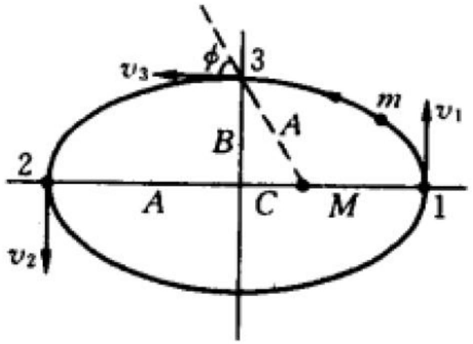
即可解得

$$v_1 = \frac{A+C}{B}\sqrt{\frac{GM}{A}}, \qquad v_2 = \frac{A-C}{B}\sqrt{\frac{GM}{A}}.$$

在 3 处的面积速度为

$$\frac{1}{2}v_3 A\sin\phi = \frac{1}{2}v_3 B,$$

例 14 将太阳质量记为 M，行星椭圆轨道的半长轴记为 A，半短轴记为 B. 试求行星在图 4-34 中 1，2，3 处的速度大小 v_1, v_2, v_3，继而导出开普勒第三定律.



由
$$\frac{1}{2}v_3B = \frac{1}{2}v_1(A-C),$$

得
$$v_3 = \sqrt{\frac{GM}{A}}.$$

（3 处法向加速度由引力分量提供，即有

曲率半径

$$\frac{mv_3^2}{\rho_3} = \frac{GMm}{A^2}\sin\phi, \quad \rho_3 = \frac{A^2}{B}, \quad \sin\phi = \frac{B}{A},$$

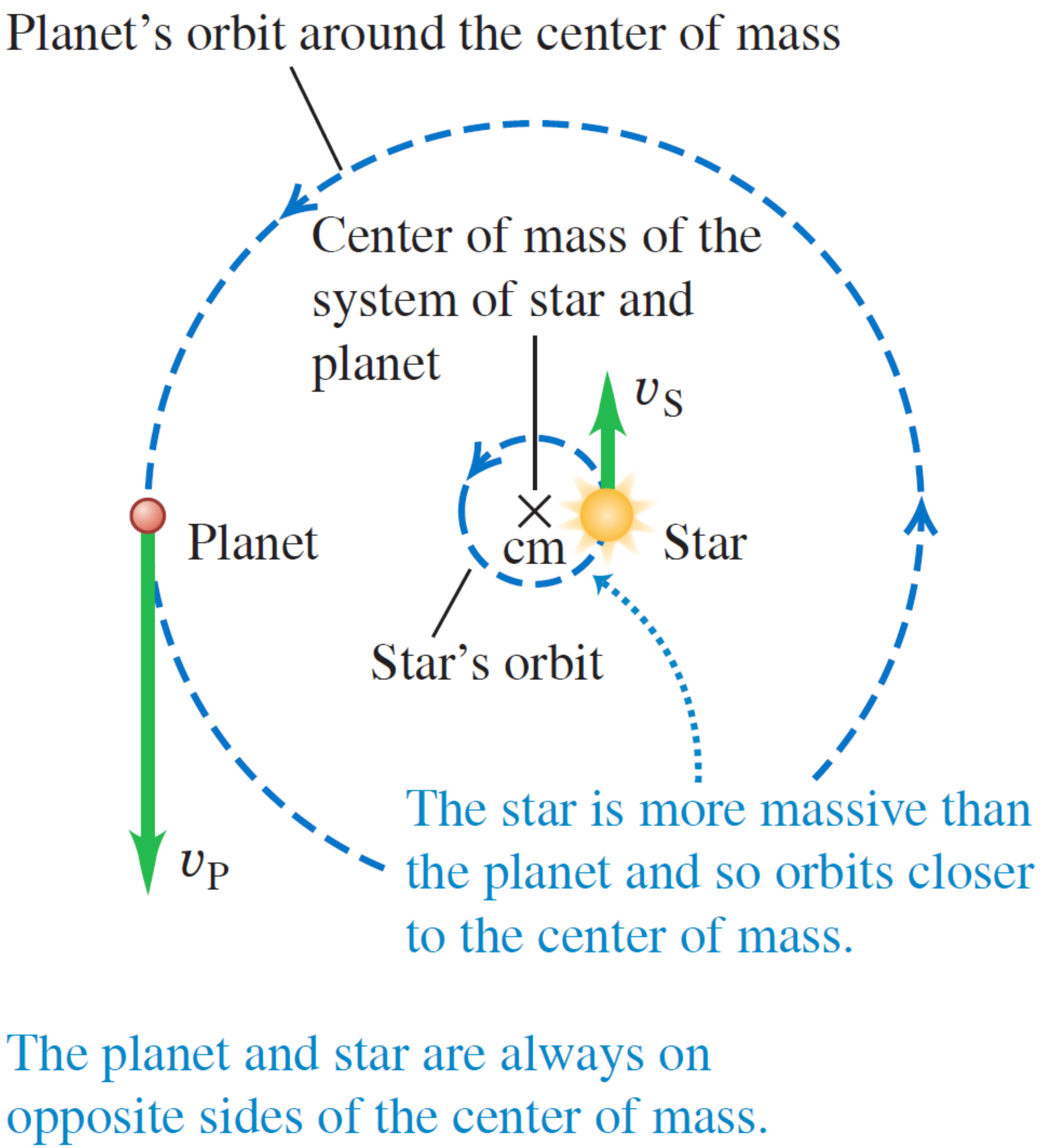
直接可得 $v_3 = \sqrt{\dfrac{GM}{A}}$.）

椭圆轨道周期
$$T = \frac{\pi AB}{\frac{1}{2}v_3B} = 2\pi A\sqrt{\frac{A}{GM}},$$

可得
$$\frac{A^3}{T^2} = k, \qquad k = \frac{GM}{4\pi^2},$$

即为开普勒第三定律.

恒星也受行星万有引力影响



- 太阳和行星都绕着质心做圆周运动；
- 恒星的圆周运动半径很小，通常被称为“抖动”（wobble)；
- 通过观测恒星的“抖动”，天文学家发现了无法直接观测到的行星。

地球自转对重力的影响

$$w_0 - F = \frac{mv^2}{R_E}$$

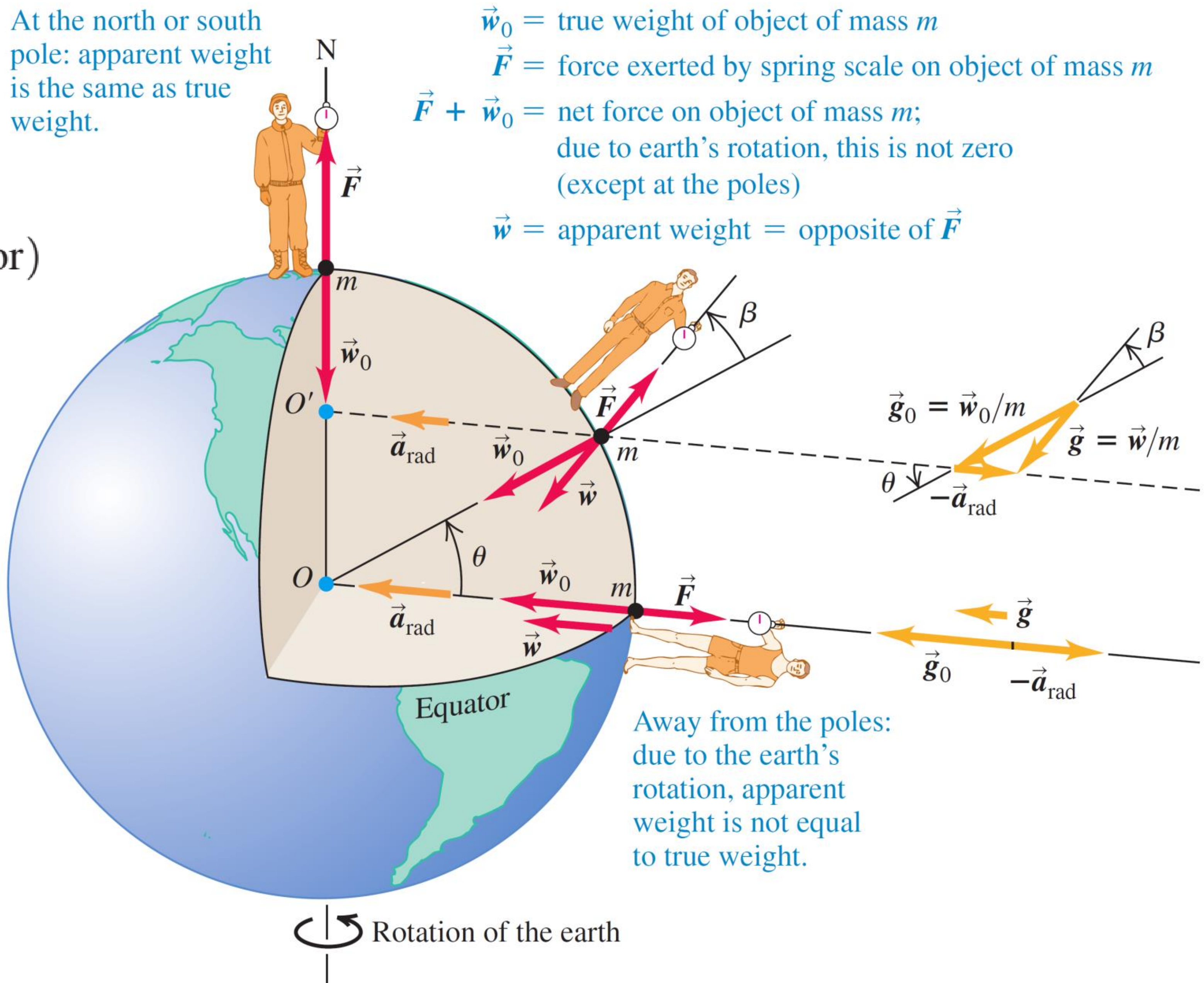
$$w = w_0 - \frac{mv^2}{R_E} \qquad \text{(at the equator)}$$

赤道的重力加速度小一点

$$g = g_0 - \frac{v^2}{R_E} \qquad \text{(at the equator)}$$

$$v = \frac{2\pi(6.37 \times 10^6\ \text{m})}{86{,}164\ \text{s}} = 465\ \text{m/s}$$

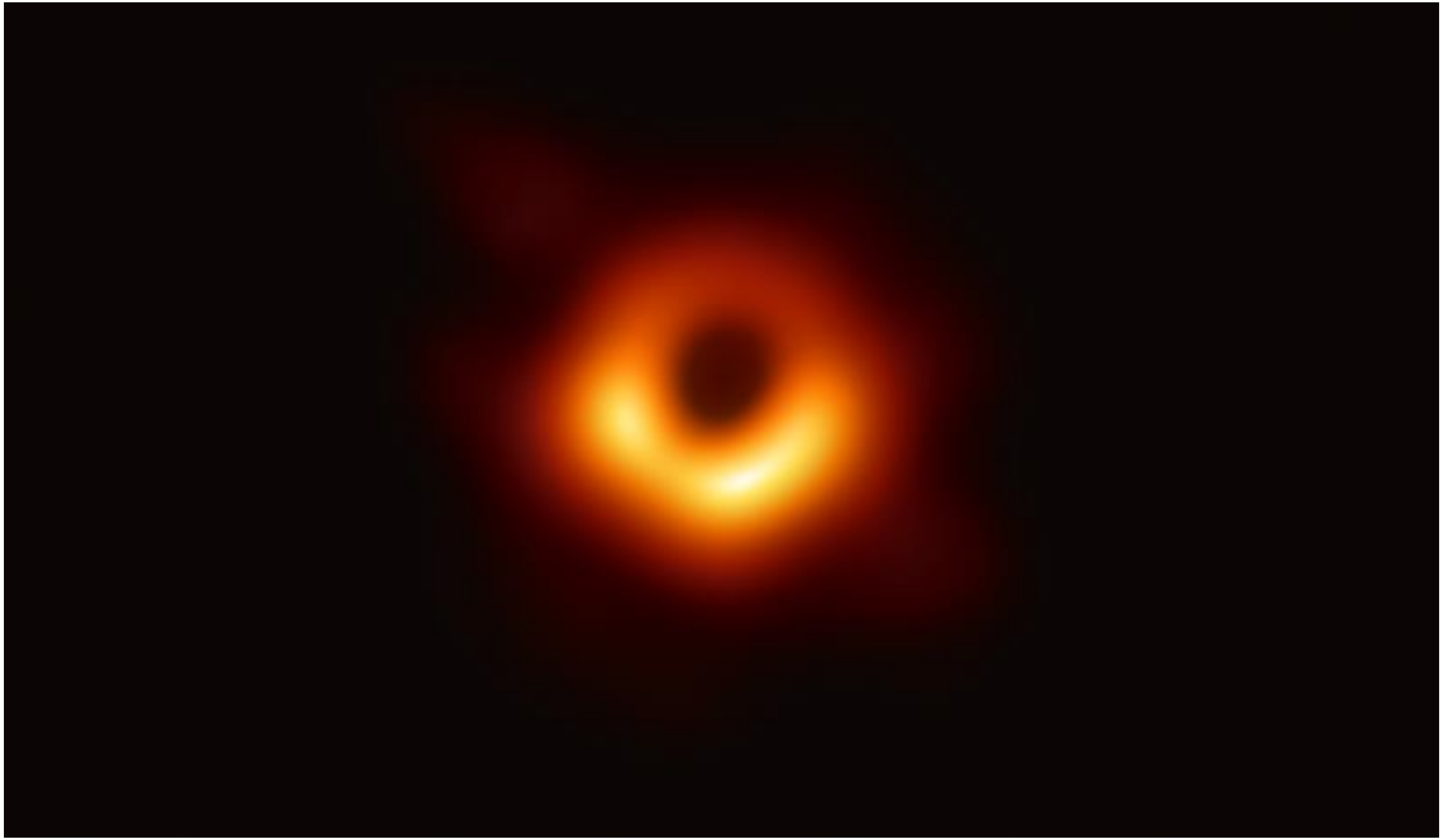
$$\frac{v^2}{R_E} = \frac{(465\ \text{m/s})^2}{6.37 \times 10^6\ \text{m}} = 0.0339\ \text{m/s}^2$$



B. 万有引力的应用

b) 黑洞

April 10, 2019: Astronomers Capture First Image of a Black Hole



逃逸速度

星球表面势能：$U_1 = -\frac{GMm}{R}$

星球表面动能：$K_1 = \frac{1}{2}mv^2$

逃逸后势能：$U_2 = 0$

逃逸后动能：$K_2 = 0$

$\xrightarrow{\text{机械能守恒}}$ 逃逸速度 $v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}}R$

$$M = \rho V = \rho\left(\tfrac{4}{3}\pi R^3\right)$$

逃逸速度 $$v=\sqrt{\frac{2GM}{R}}=\sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}R}\qquad c=\sqrt{\frac{2GM}{R_S}}$$

- 密度不变，天体半径R越大，逃逸速度越大；
- 假如逃逸速度比光速还大，则表面任何物体包括光都不能逃脱，这就是黑洞。

Schwarzschild radius of a black hole

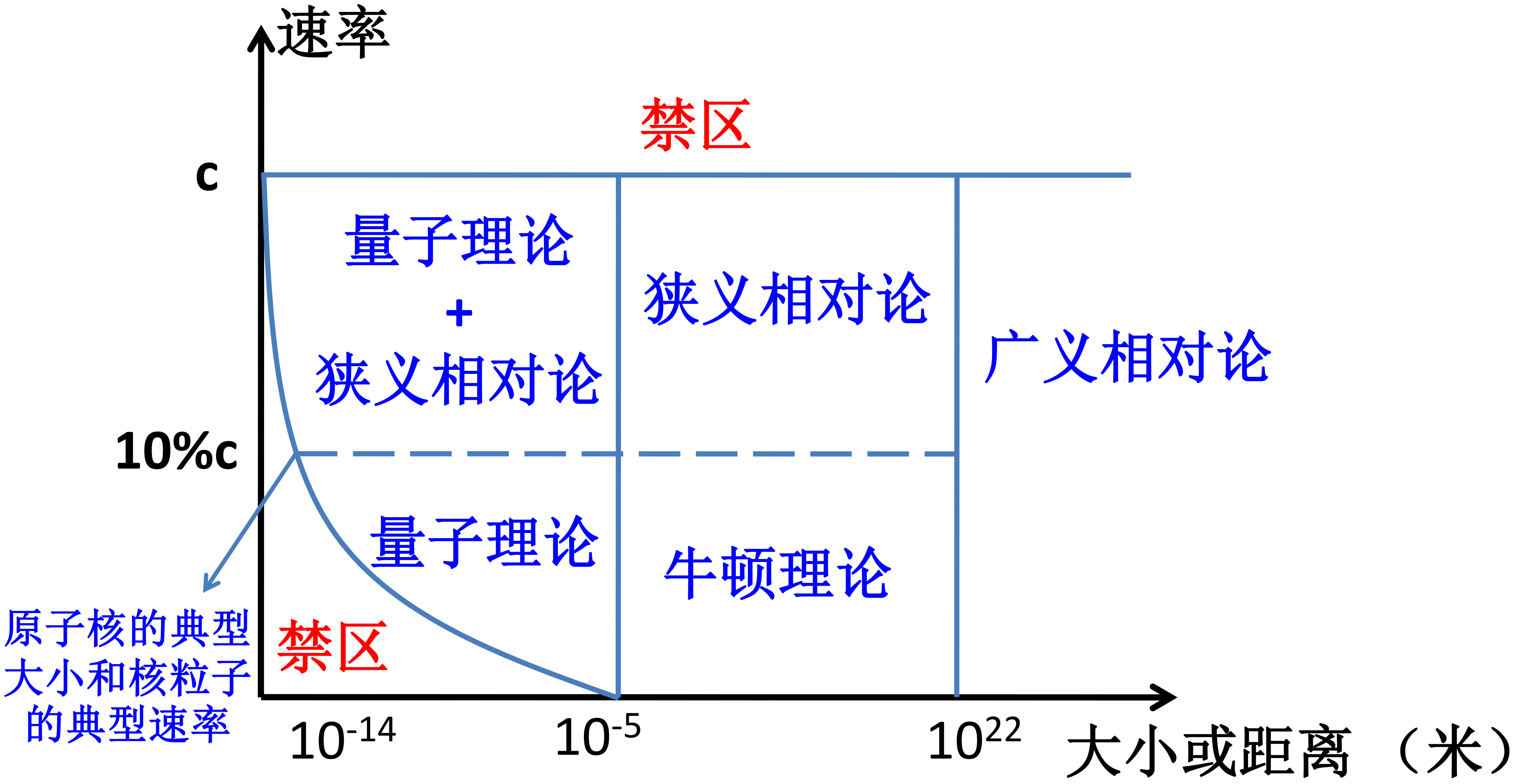
$$R_S=\frac{2GM}{c^2}$$

Gravitational constant

Mass of black hole

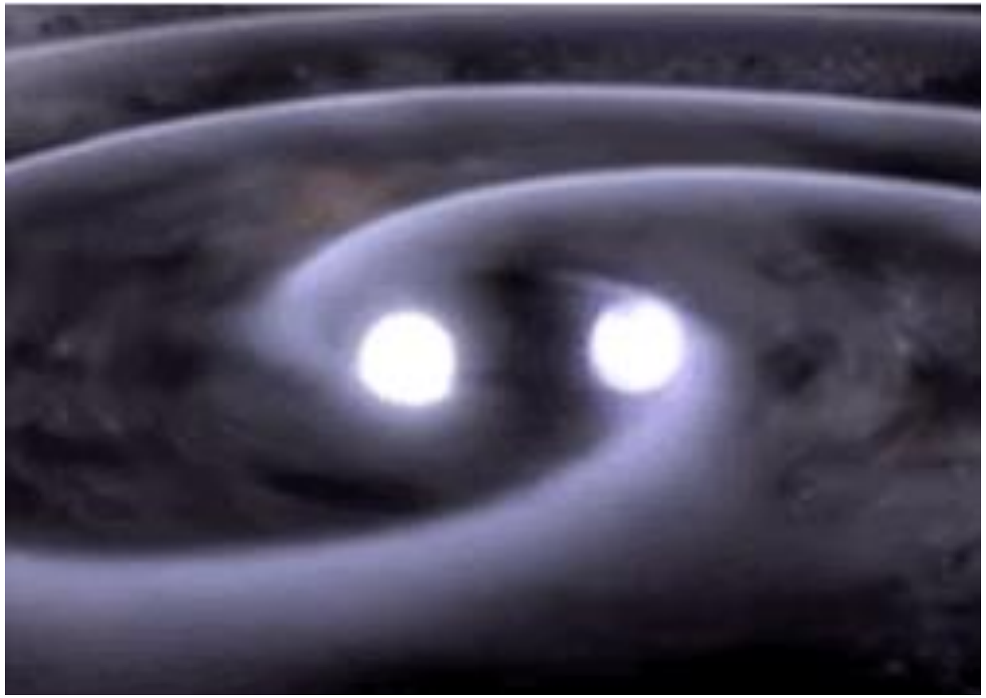
Speed of light in vacuum


This is the first-ever image of a black
hole released by the Event Horizon



速率
禁区
c
量子理论
+
狭义相对论
狭义相对论
广义相对论
10%c
量子理论
牛顿理论
原子核的典型
大小和核粒子
的典型速率
禁区
10-14
10-5
1022
大小或距离（米）

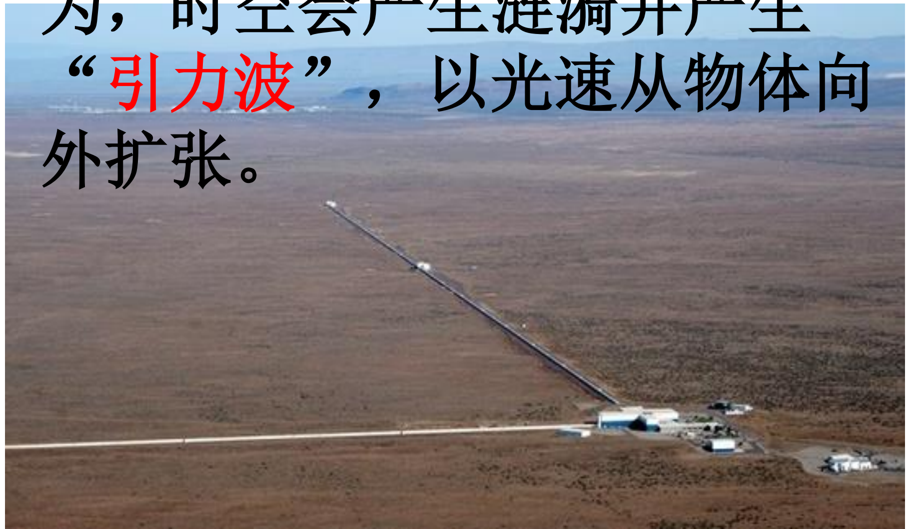
电磁场具有动量和能量且能传播电磁波。这使人们联想万有引力场也是物理的实在，能传播**引力波**。广义相对论预言存在引力波，也有许多人努力探测它，但目前尚无很好的结果。



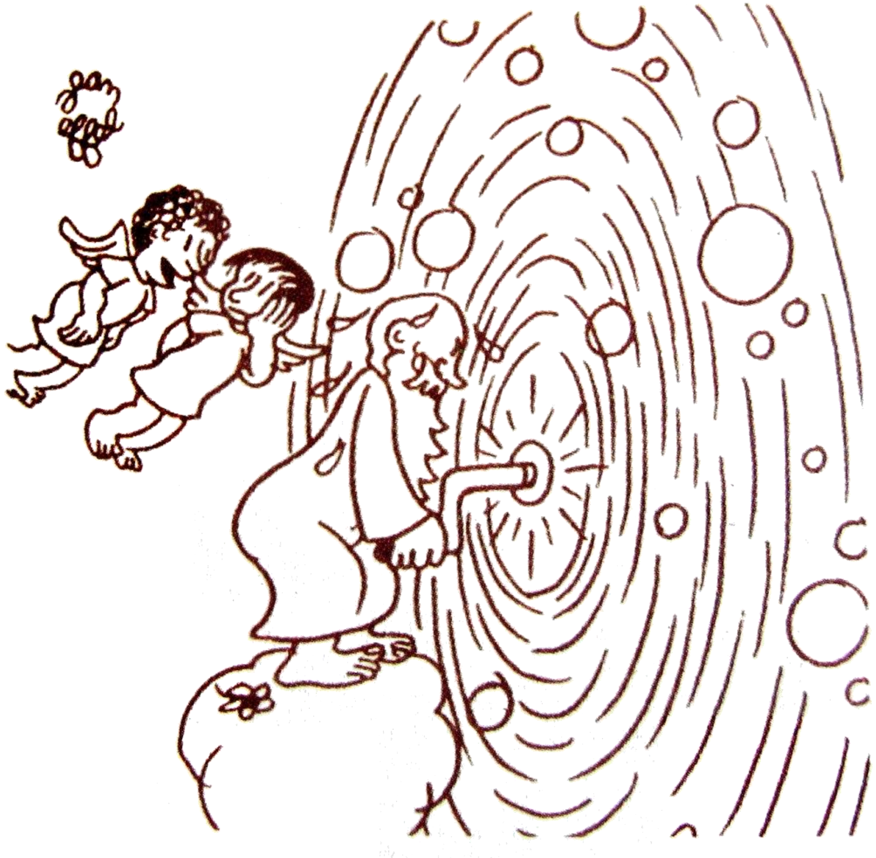
2016年2月11日：LIGO宣布成功发现引力波

1916年6月：爱因斯坦预测了宇宙中的涟漪

根据广义相对论，引力是质量巨大物体周围时空的扭曲。在创立广义相对论时爱因斯坦认为，时空会产生涟漪并产生“引力波”，以光速从物体向外扩张。



电磁波的传播可用光子解释，类似地，光子也导致**引力子**概念的引出。万有引力也不再是超距作用，而以引力子为媒介。这些都是物理学家正在探索的领域。



万有引力的几个重要应用

在分析了几个守恒定律之后，我们再回过头来以其为基础，讨论一下万有引力的一些重要应用。

1) 第一宇宙速度

这时，地球和物体之间的距离可用地球半径***R***代替，根据牛顿第二定律和万有引力定律，得

$$G\frac{M_{地}m}{R^2}=m\frac{\upsilon^2}{R}=mg$$

所以 $\upsilon=\sqrt{G\frac{M_{地}}{R}}$ 或 $\upsilon=\sqrt{Rg}$

用 $R\approx 6400$ km，$g = 9.8$ m·s^{-2} 代入，得到 $\upsilon\approx 7.9$ km·s^{-1}，

即第一宇宙速度的数值。

2）第二宇宙速度（逃逸速度）

要使物体能逃离地球，不再返回，它的速度应更高，即至少要具有**第二宇宙速度**的值才行。

因为无限远处的势能为0，根据引力场中的机械能守恒，其离开地球时的机械能至少应该为 $\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{GMm}{R} = 0$。所以有

$$\upsilon = \sqrt{2G\frac{M_{地}}{R}} \approx 11km/s^2$$

★对于一个质量为***M***，半径为 ***r*** 的体系，同样可以规定它的

"第一宇宙速度"为 $\upsilon_1 = \sqrt{G\frac{M}{r}}$

"第二宇宙速度"为 $\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$

如果有一个引力**体系的第二宇宙速度等于光速**，$\sqrt{\frac{2GM}{r}} = c$ 。

若体系的半径 $r < \frac{2GM}{c^2}$，它的第二宇宙速度就要大于光速。这就是说，在这种物体上发射的光都不能克服引力的作用，最终一定要落回到该体系上来。简言之，这种物体根本不可能有光发射出去，因此，我们不能看到它，故称为“**黑洞**”。因此，$r_g = \frac{2GM}{c^2}$ 也是一个关键性的物理量，称为“**引力半径**”。

地球质量约为**6×10**^{24}**kg**，可求得引力半径 $r_g \approx 0.9$厘米。

下面我们来看一个较实际的例子。

考虑一个球形体系，半径为 r，其中物质均匀分布，密度为 ρ，则体系的质量为 $M=\frac{4\pi}{3}r^3\rho$

如果这个体系的半径恰好达到自己的引力半径，则

$$r_g=\frac{2GM}{c^2}=\frac{8\pi G r_g^3\rho}{3c^2}$$

亦即引力半径为 $r_g=(\frac{3c^2}{8\pi G\rho})^{\frac{1}{2}}$

说明对于生活在密度为 ρ 的环境中的人，他不可能把光发射到超出 r_g 的范围。

我们的宇宙的密度平均约为 $\rho\approx10^{-29}g/cm^3$，因此，可求得引力半径为 $r_g\approx10^{28}cm\approx10^{10}$ 光年，也就是说，我们不可能把光发射到 10^{26} 米之外，我们称这个尺度为**宇宙大小**，或**宇宙半径**。

* 3） 第三宇宙速度

从地面发射的火箭如具有“**第三宇宙速度**”，那就不仅能够脱离地球，而且可以逃逸出太阳系。

火箭如果能够逃出太阳系，机械能至少应等于0。由于机械能守恒，在地球这样的距离上，*E*也至少等于零，

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{GMm}{R_1} = 0$$

这里R_l为地球与太阳的距离。由上式解得 $\upsilon = \sqrt{2GM/R_1} \approx 42.2\,\text{km/s}$

但**这里的42.2km/s应当是已脱离了地球引力范围时的速率**。那么火箭从地面出发时相对于地球的速率应当多大呢?

选用“静止”参考系。火箭已脱离了地球引力范围时的动能为$\frac{1}{2}m(42.2\,\text{km/s})^2$，其时火箭–地球势能为0。应当沿地球公转方向发射火箭，以最大限度地利用地球的公转。火箭以相对速率υ'从地面出发时的动能为$\frac{1}{2}m(\upsilon'+29.8)^2$，其时火箭–地球势能为$(-mgR^2/\rho)\big|_{\rho=R}$，$R$为地球半径。由机械能守恒定律，

$$\frac{1}{2}m(\upsilon'+29.8\,\text{km/s})^2-\frac{mgR^2}{\rho}\Big|_{\rho=R}=\frac{1}{2}m(42.2\,\text{km/s})^2$$

由此求得

$$\upsilon'=(\sqrt{42.2^2+11.2^2}-29.8)\,\text{km/s}=(42.5-29.8)\,\text{km/s}=12.7\,\text{km/s}$$

但这结果是完全错误的。

必须计及地球动能的改变，才可以得出正确的结果。

选取“地球–火箭”系的质心坐标系。在质心坐标系中，地球的动能始终为零。火箭已脱离了地球引力范围时的动能应为

$$\frac{1}{2}m(42.2\,\text{km/s}-29.8\,\text{km/s})^2$$

其时地球–火箭势能为零。火箭以相对速率υ'从地面出发时的动能为$\frac{1}{2}m\upsilon'^2$，地球–火箭势能为$(-mgR^2/\rho)\big|_{\rho=R}$。根据机械能守恒定律，

$$\frac{1}{2}m\upsilon'^2-\frac{mgR^2}{\rho}\bigg|_{\rho=R}=\frac{1}{2}m(42.2\,\text{km/s}-29.8\,\text{km/s})^2$$

由此解得第三宇宙速度

$$\begin{aligned}\upsilon'&=\sqrt{(42.2^2-29.8)^2+11.2^2}\ \text{km/s}\\&=\sqrt{12.4^2+11.2^2}\ \text{km/s}\\&=16.7\,\text{km/s}\end{aligned}$$