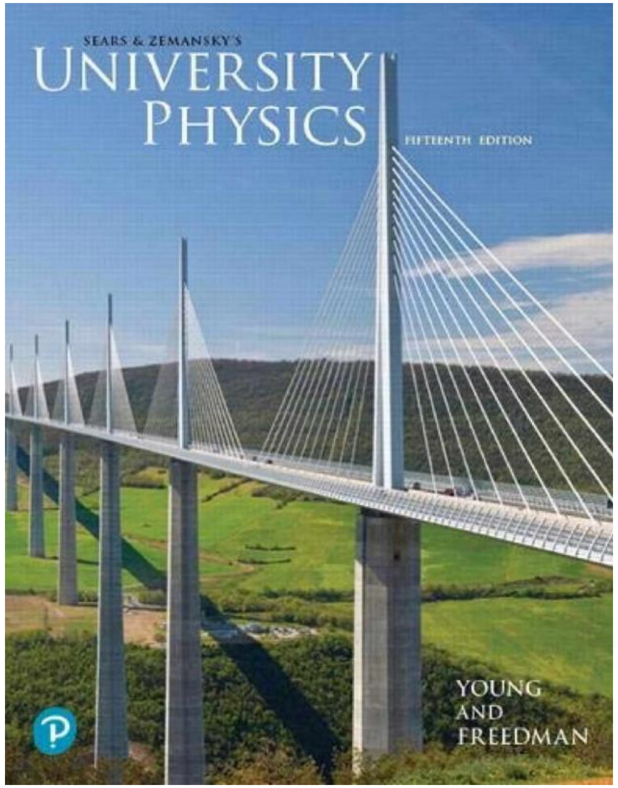
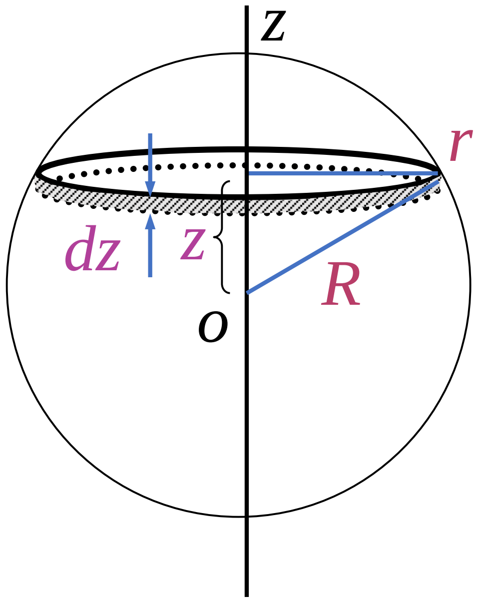
普通物理I PHYS1181 第10讲

力矩、角动量
Torque
angular momentum



例6：求均匀球体绕直径的转动惯量

设球体的半径为R，总质量为m，密度为$\rho=3m/4\pi R^3$。



10.1 力矩（torque，又叫扭矩，moment）

力矩的大小：

$$\tau = Fl = rF\sin\phi = F_{\tan}r$$

Magnitude of torque due to force $\vec{F}$ relative to point O

Lever arm of $\vec{F}$

Magnitude of $\vec{r}$ (vector from O to where $\vec{F}$ acts)

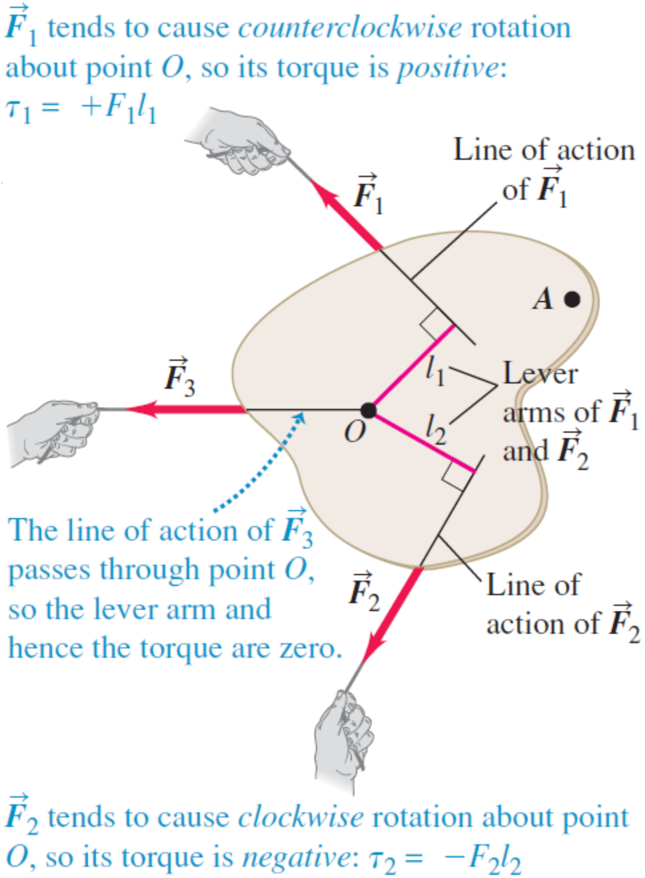
Magnitude of $\vec{F}$

Angle between $\vec{r}$ and $\vec{F}$

Tangential component of $\vec{F}$

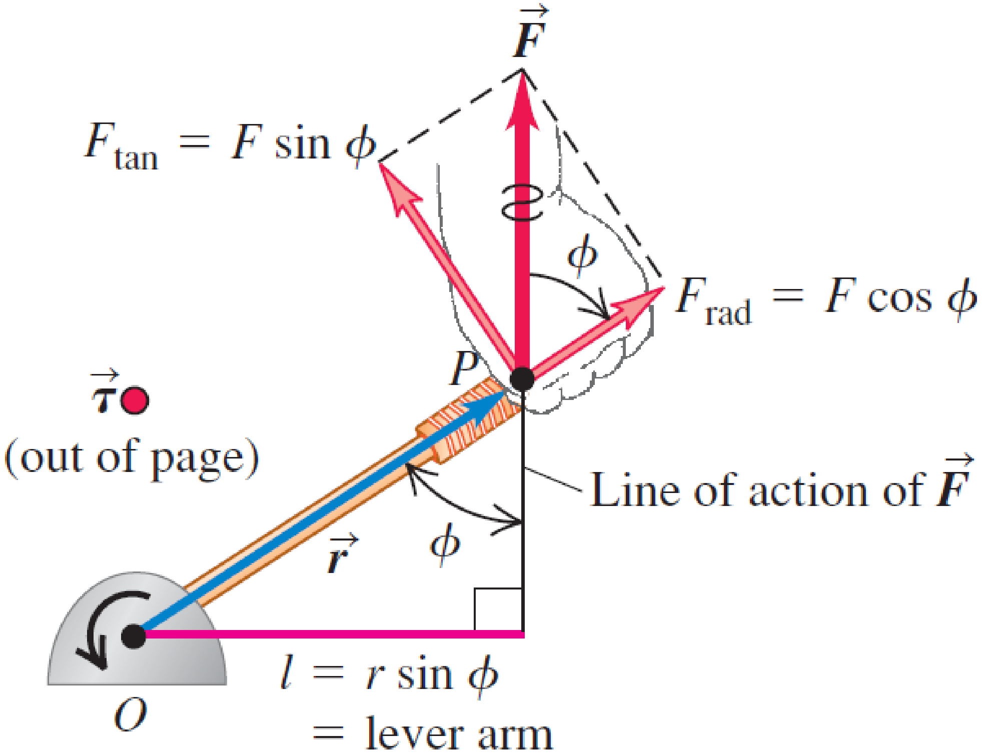
逆时针，正值：

顺时针，负值：



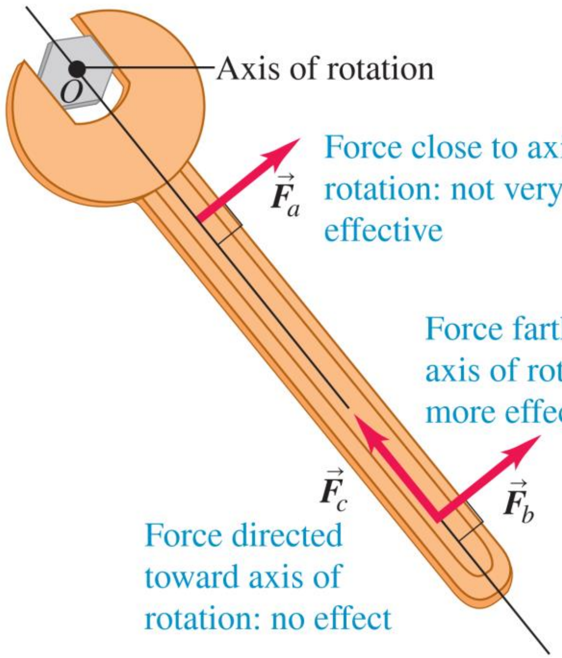
Three ways to calculate torque:

$\tau = Fl = rF\sin\phi = F_{\tan}r$



力矩

力矩的方向：



$\vec{F}$ 对参考点O的力矩为一矢量：

Torque vector due to force $\vec{F}$ relative to point O

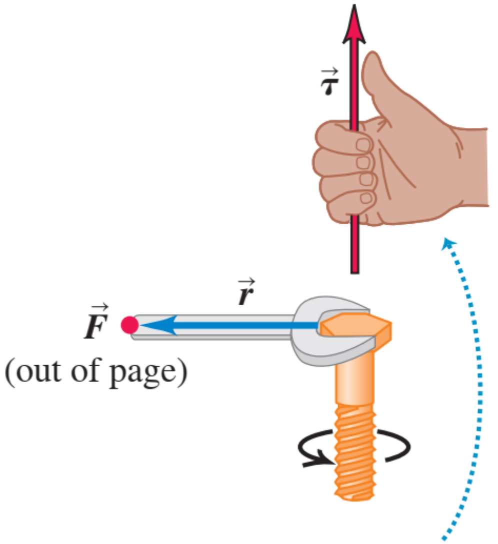
Vector from O to where $\vec{F}$ acts

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

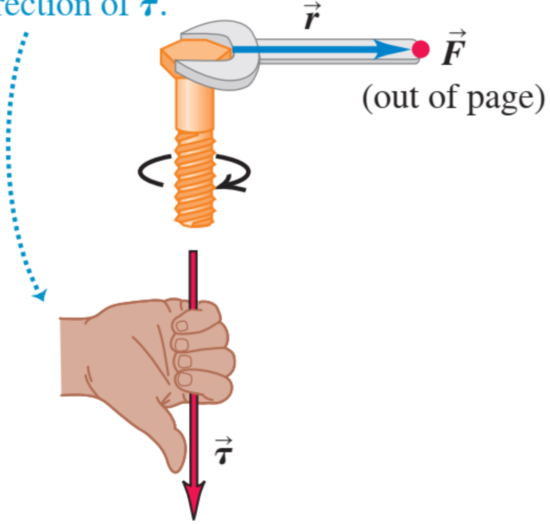
Force $\vec{F}$

力矩是力臂和力的向量积

右手法则：

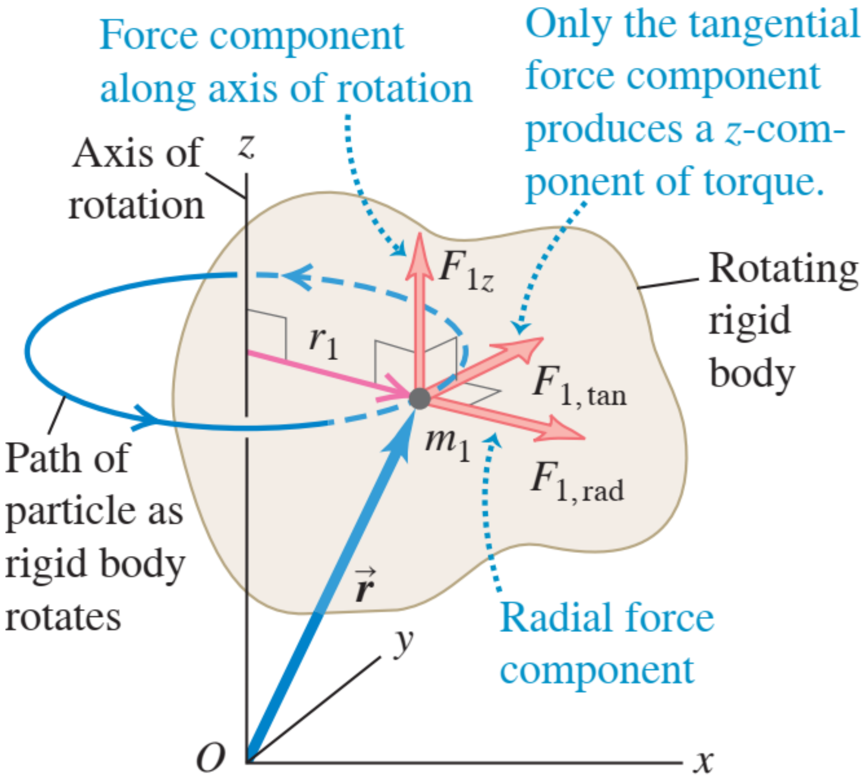


If you point the fingers of your right hand in the direction of $\vec{r}$ and then curl them in the direction of $\vec{F}$, your outstretched thumb points in the direction of $\vec{\tau}$.



10.2 转动定律

刚体定轴转动定律：刚体在作定轴转动时,刚体的角加速度与它所受到的**合外力矩**成正比,与刚体的转动惯量成反比



Rotational analog of Newton's second law for a rigid body:

$$\sum \tau_z = I\alpha_z$$

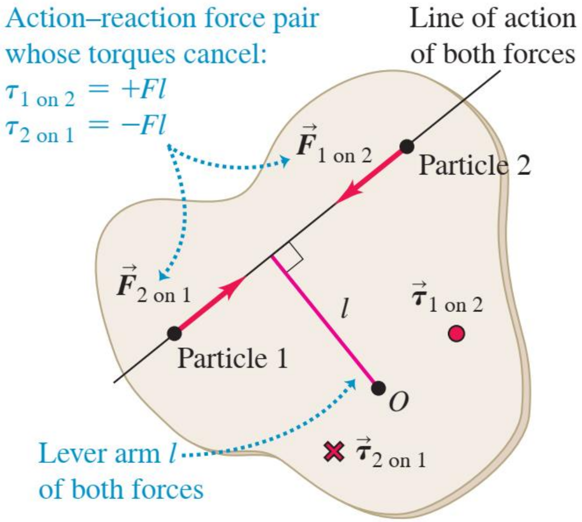
Net torque on a rigid body about z-axis

Moment of inertia of rigid body about z-axis

Angular acceleration of rigid body about z-axis

注意：合外力矩，转动惯量和角加速度都是相对于该转动轴的

合内力矩为零：



10.3 刚体运动（平动+转动）的动能

刚体运动的组合规律：

刚体的任何运动都一定可以分解为**质心的平动 + 绕穿过质心的某一个轴的转动。**

刚体运动的动能：

Kinetic energy of *translation* of center of mass (cm)

Kinetic energy of *rotation* around axis through cm

Kinetic energy of a rigid body with both translation and rotation

$$K = \underbrace{\tfrac{1}{2}Mv_{\mathrm{cm}}{}^{2}}_{\text{translation of cm}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}I_{\mathrm{cm}}\omega^{2}}_{\text{rotation around cm}}$$

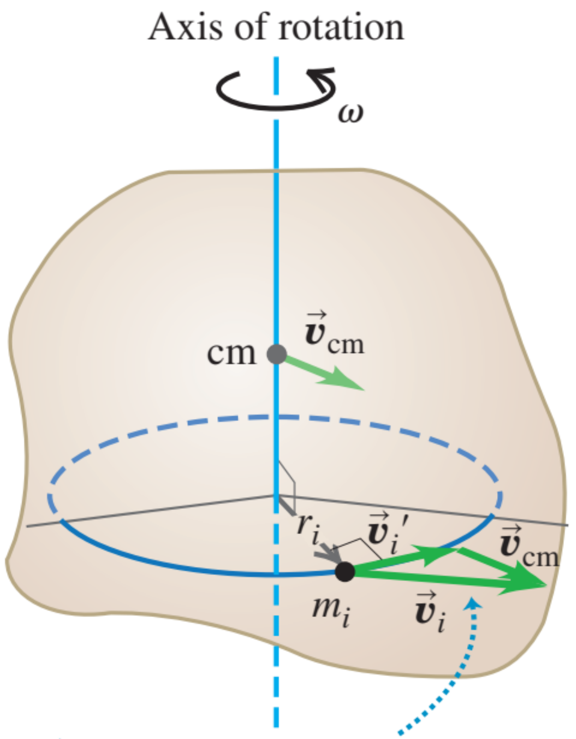
Angular speed of rigid body

Moment of inertia of rigid body about axis through cm

Mass of rigid body

Speed of cm

= 质心的动能 +围绕质心转动的转动动能



Velocity $\vec{v}_i$ of particle in rotating, translating rigid body = (velocity $\vec{v}_{\mathrm{cm}}$ of center of mass) + (particle's velocity $\vec{v}_i{}'$ relative to center of mass)

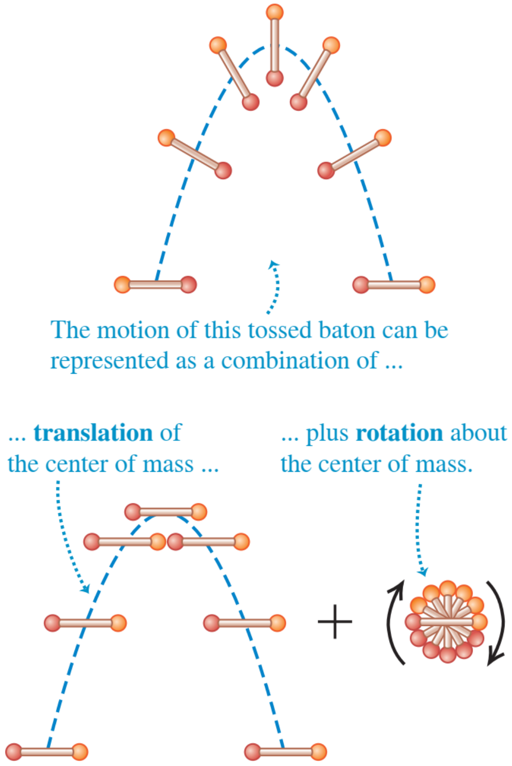
$$\vec{v}_i = \vec{v}_{\mathrm{cm}} + \vec{v}_i{}'$$

质点在惯性系中的速度　质心速度　质点相对于质心的速度

刚体的任何运动都一定可以分解为**质心的平动** + **绕穿过质心的某一个轴的转动。**

The motion of a rigid body is a combination of translational motion of the center of mass

and rotation around the center of mass.



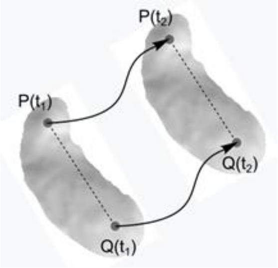
- 球棍质心的轨迹虽然是抛物线，但也是平移运动

刚体做圆周运动 ≠ 刚体转动！

- 摩天轮的小车轨迹虽然是圆周运动，但小车还是在做平移运动，而不是转动

如何理解平动?

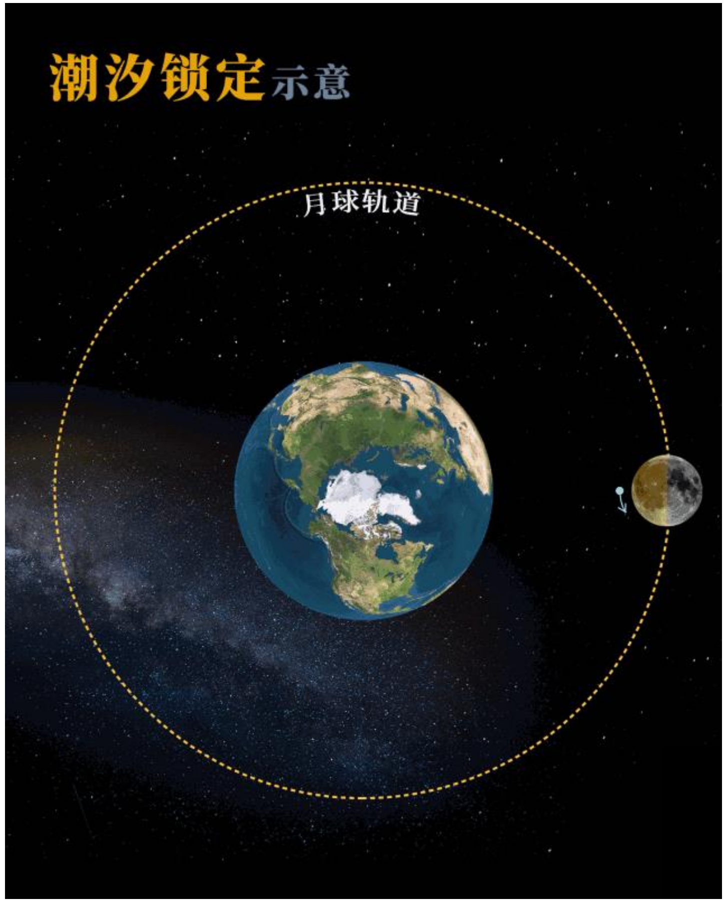
（平移运动，translational motion）



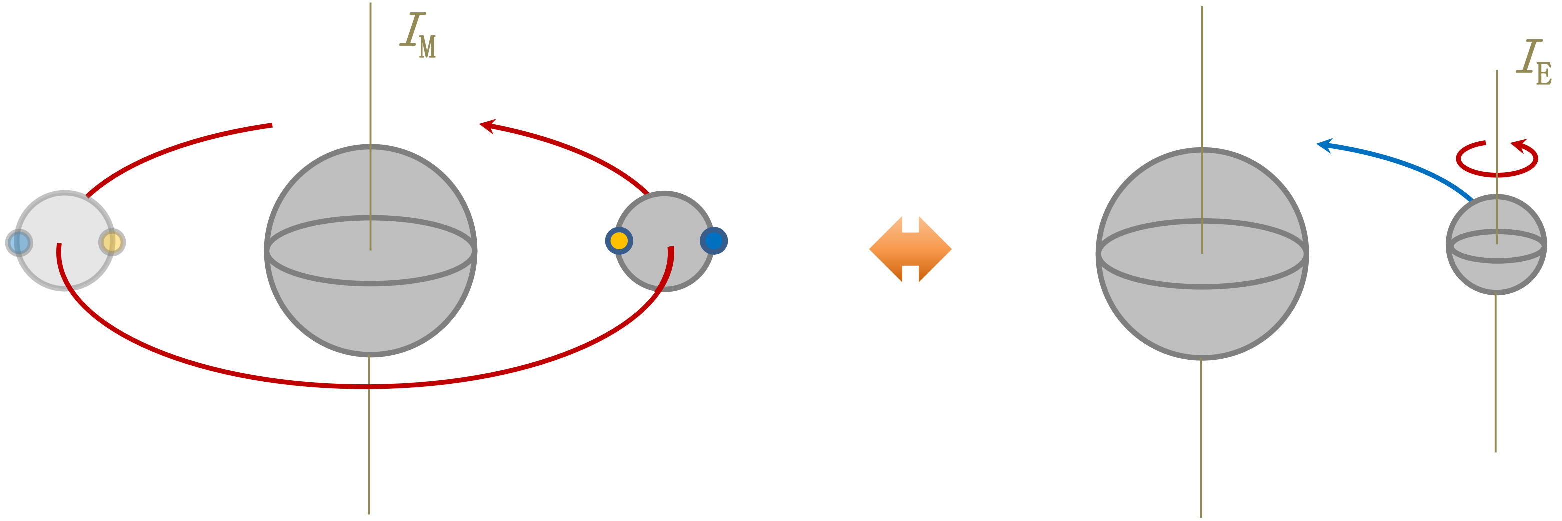
- 平移运动只针对刚体而言
- 平移运动的刚体，其内部所有质点的位移矢量、速度矢量、加速度矢量都相同
- 刚体的质心只有一个质点，因此刚体质心的运动就是平移运动，其他质点相对于刚体可以有转动

同时做圆周运动和转动的例子：同步自转

月亮的脸偷偷的在改变？错！月球永远只有一面朝向地球



月球的绕地轴的转动可分解为绕地轴的圆周平动+绕自身质心轴的转动



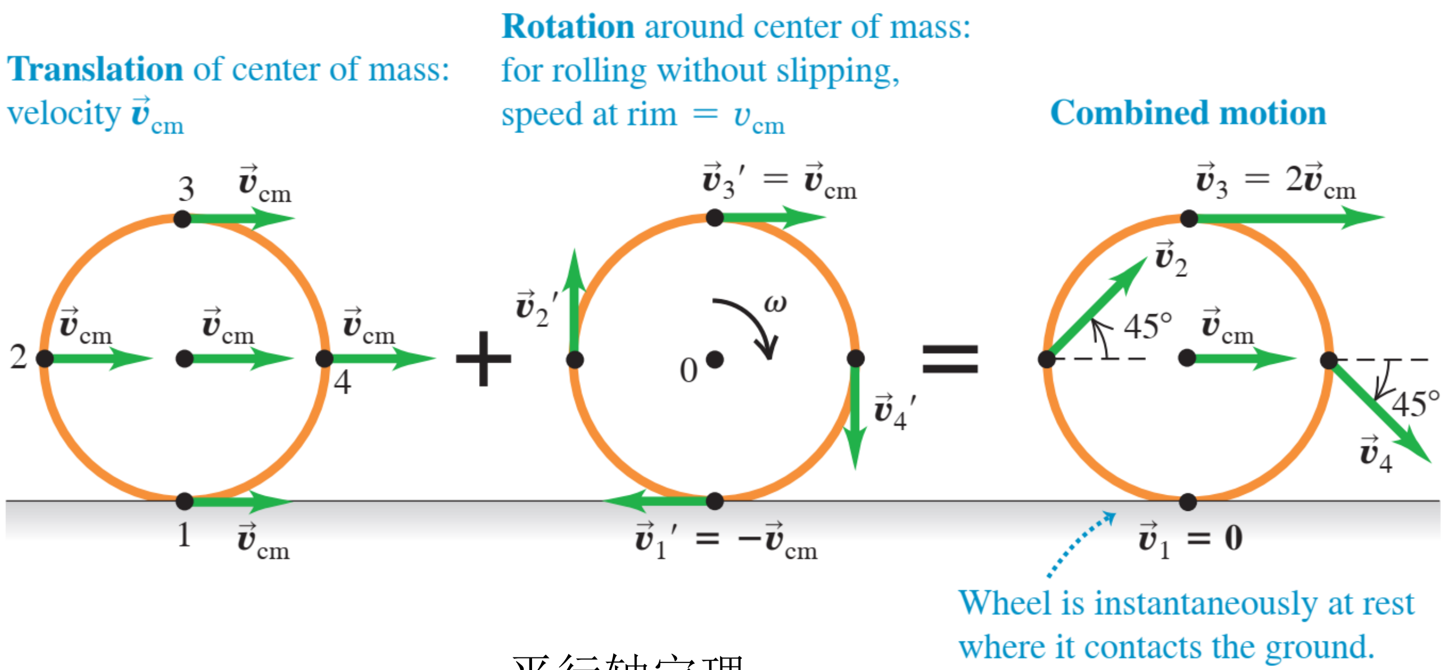
围绕地球轴的**转动** ⇔ 质心围绕地球轴的**圆周平动** + 围绕质心的**自转**

思考题：地球系中，求月球的公转转动惯量I_M 、自转转动惯量I_E 、公转动能K_E、自转动能K_M、总动能K、总势能U

10.4 无滑动的滚动

Condition for rolling without slipping:

Speed of center of mass of rolling wheel → $v_{cm} = R\omega$ ← Radius of wheel; Angular speed of wheel



平行轴定理

$$K = \frac{1}{2} I_1 \omega^2 \qquad I_1 = I_{cm} + MR^2$$

$$K = \frac{1}{2} I_1 \omega^2 = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}{}^2$$

各种车辆的车轮，只要不打滑，就是无滑动的滚动

生活中的实例：

汽车的时速表通过计算车轮转速和车轮半径来得到。出厂时按配备轮胎校准。

想一想：如果你改装你的爱车，换上更大号的轮胎，仪表盘显示的车速比实际车速更快还是更慢？

10.5 力矩的功

力矩作的功等于力矩对角位置的积分

Work done by a torque τ_z

Upper limit = final angular position

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_z \, d\theta$$

Integral of the torque with respect to angle

Lower limit = initial angular position

恒定力矩作的功等于力矩乘以角位移

Work done by a constant torque τ_z

Torque

$$W = \tau_z(\theta_2 - \theta_1) = \tau_z \Delta\theta$$

Final minus initial angular position = angular displacement

力矩的功率等于力矩乘以角速度

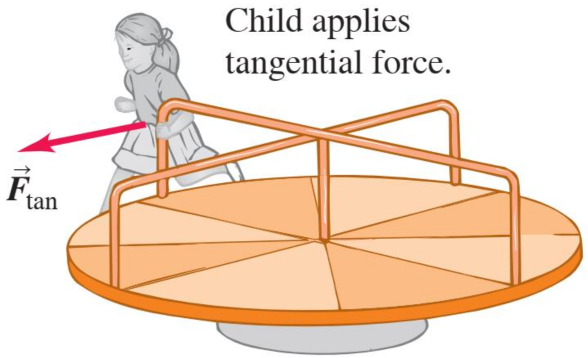
Power due to a torque acting on a rigid body

$$P = \tau_z \omega_z$$

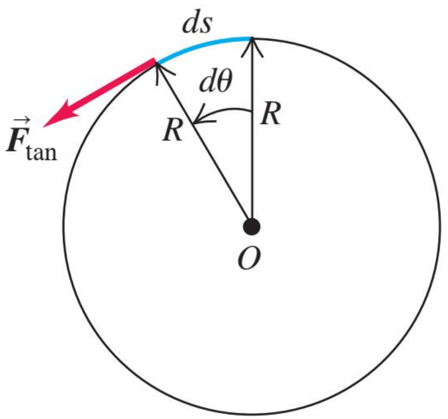
Torque with respect to rigid body's rotation axis

Angular velocity of rigid body about axis

(a)



(b) Overhead view of merry-go-round



$$dW = F_{tan} R \, d\theta$$

$$dW = \tau_z \, d\theta$$

10.6 刚体定轴转动的动能定理

$$\tau_z \, d\theta = (I\alpha_z)\, d\theta = I\frac{d\omega_z}{dt} d\theta = I\frac{d\theta}{dt} d\omega_z = I\omega_z \, d\omega_z$$

刚体定轴转动的动能定理：（work-kinetic energy theorem）

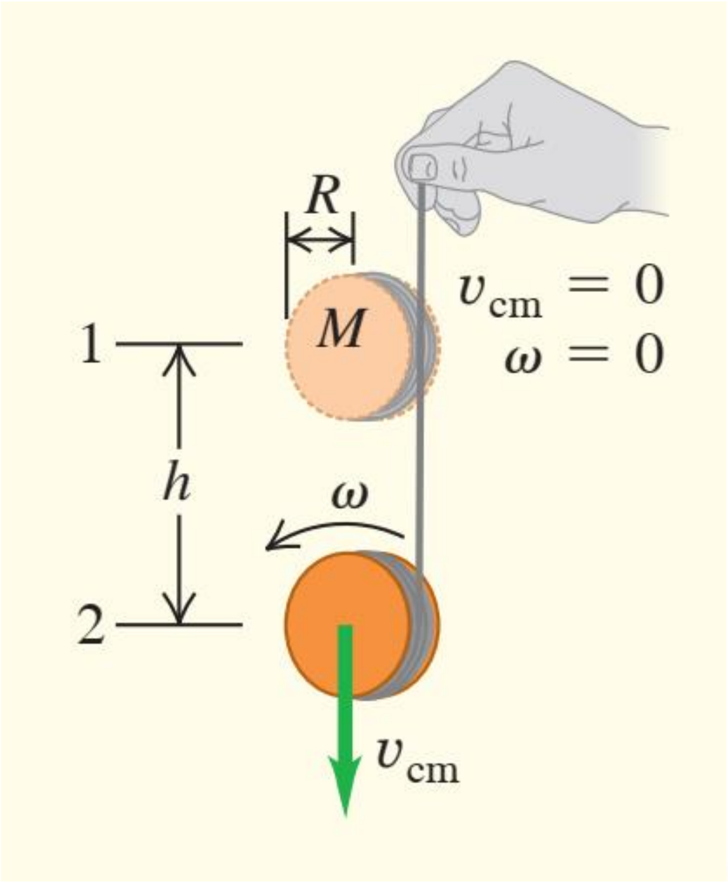
Total work done on a rotating rigid body = work done by the net external torque

$$W_{\text{tot}} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega_z \, d\omega_z = \overbrace{\tfrac{1}{2}I\omega_2^2}^{\text{Final rotational kinetic energy}} - \underbrace{\tfrac{1}{2}I\omega_1^2}_{\text{Initial rotational kinetic energy}}$$

合外力矩对刚体所作的功等于刚体转动动能的增量。

悠悠球

刚体的动能等于质心动能和相对于质心旋转的动能之和。



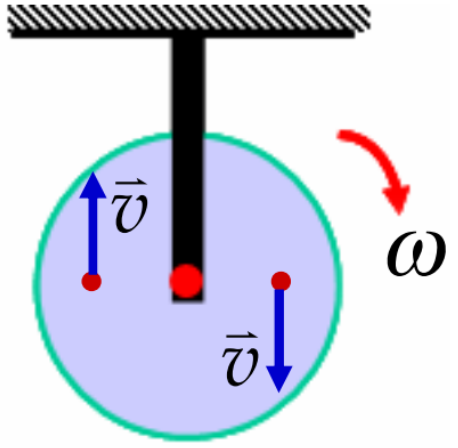
求v_{cm}的大小

角动量（angular momentum）

质点	刚体 一类特别的质点系
角动量	角动量
角动量定理	角动量定理
角动量守恒定律	角动量守恒定律

角动量的引入

问题: 绕通过质心的固定轴转动的圆盘, 它的动量为多少?



$$\vec{p}_{总} = \sum m_i \vec{v}_i = 0$$

系统有机械运动，总动量却为零?

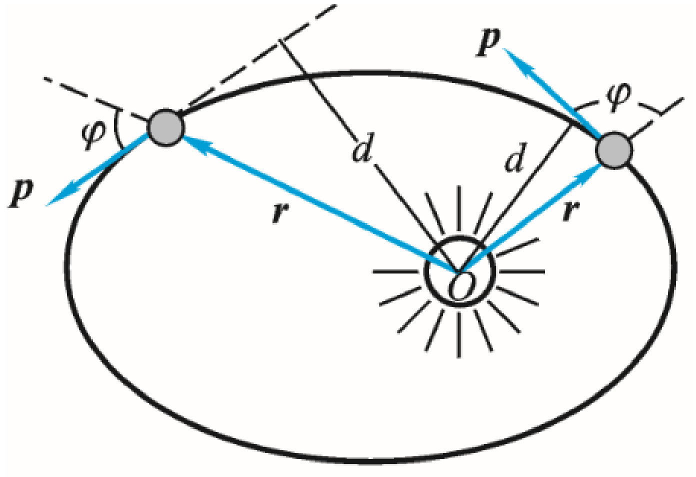
结论: 对转动物体, 不宜使用动量来量度机械的运动量.

引入与动量对应的角量——角动量(动量矩).

即, 动量对参考点(或轴)求矩. $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

10.7 角动量（动量矩）

自然界中行星围绕太阳公转

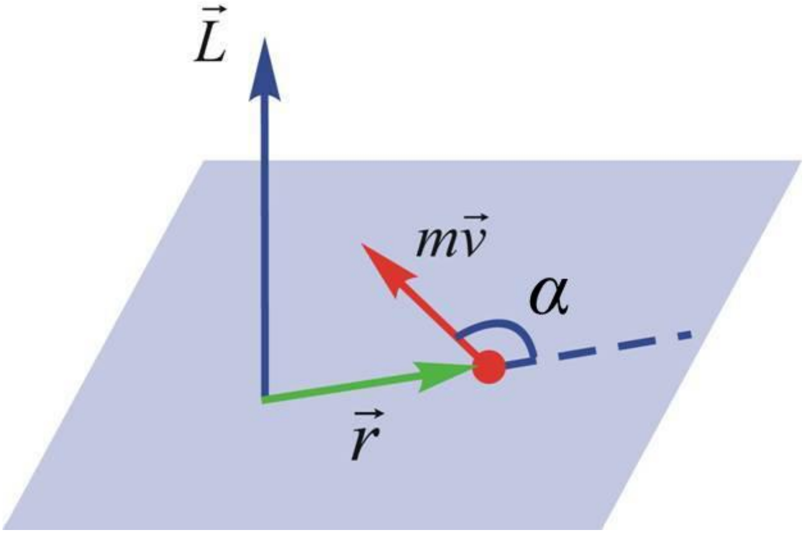


引入质点**对参考点O的角动量（angular momentum）**：

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times(m\vec{v})$$

大小：　$L=rmv\sin\alpha$

方向：右手螺旋定则确定

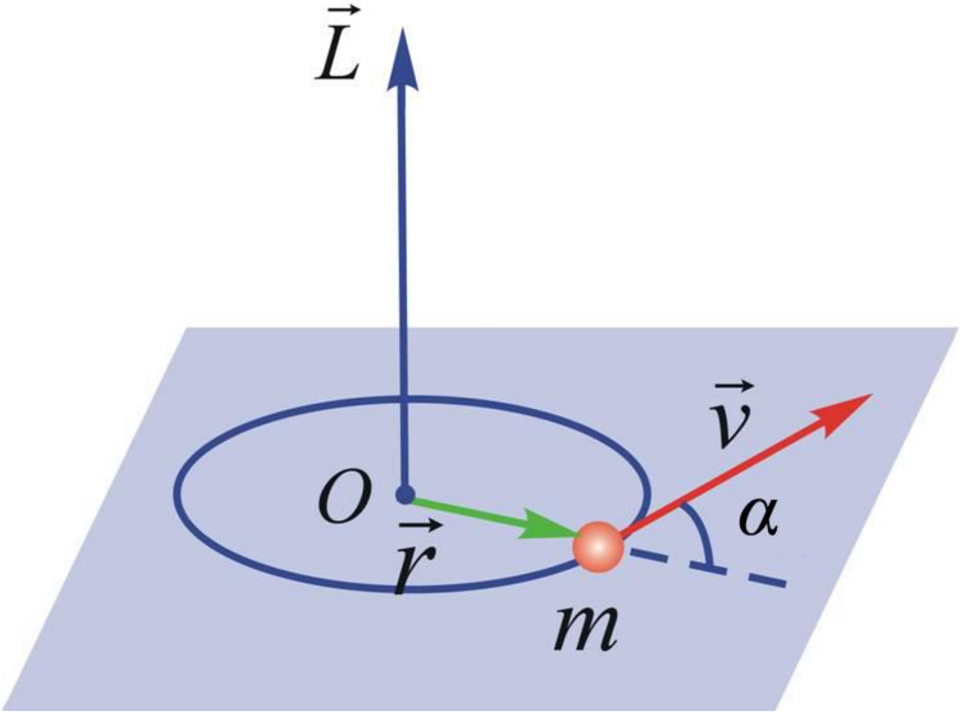


$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times(m\vec{v})$$

特例：做圆周运动时，由于 $\vec{r}\perp\vec{v}$，质点对圆心的角动量大小为 $L=rmv$，

大小不变，方向不变。

- 质点对圆心O的角动量为常量。



10.8 质点的角动量定理

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times\vec{p})=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

$$\because \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}, \quad \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}=\vec{v}\times(m\vec{v})=0$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\vec{F}$$

定义合力 $\vec{F}$ 对参考点O的力矩： $\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}$

上式又写为 $\vec{\tau}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$

$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

质点的角动量定理：

质点所受合外力矩等于它对同一参考点的角动量的时间变化率

质点系的角动量定理可写成同样形式。
原因：一对内力对于同一参考点的合力矩为零

$\vec{\tau}$ 是质点系所受合外力矩

$\vec{L}$是质点系的总角动量

因是牛顿定律的推论，则只适用于惯性系。

10.9 质点的角动量守恒定律

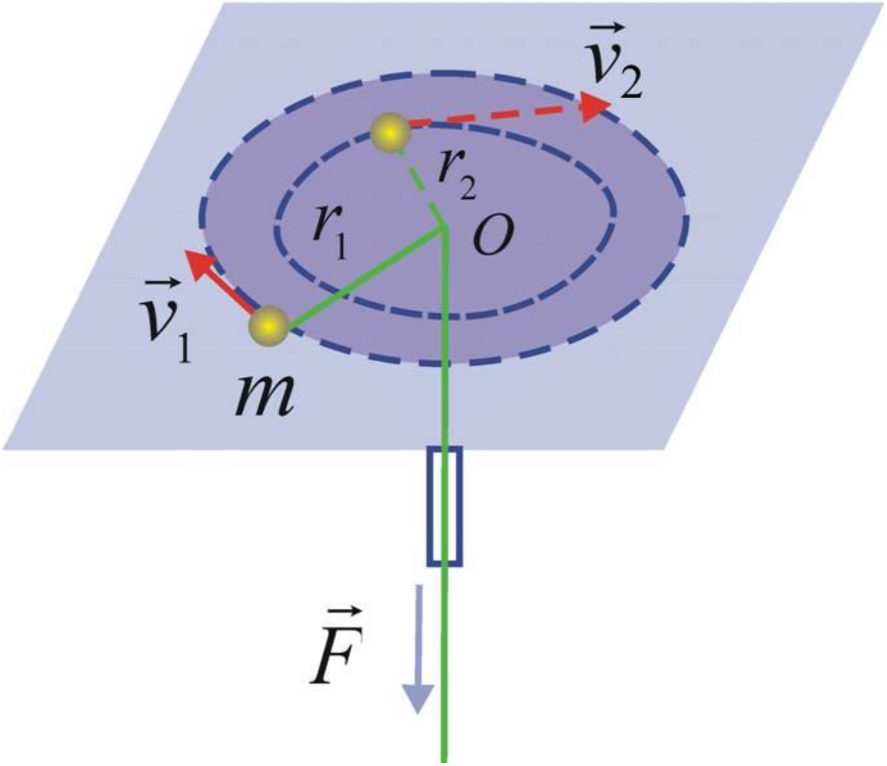
$$\text{由} \quad \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{\tau}$$

$$\text{若} \quad \vec{\tau} = 0, \quad \text{则} \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \vec{L} = \vec{L}_0 \ (\text{常矢量})$$

角动量守恒定律（**law of conservation of angular momentum**）**：**

惯性系中，如果作用在质点上的外力对某给定点的力矩为零，则质点对该点的角动量矢量在运动过程中保持不变（大小和方向均不变）。

质量为m的小球系在轻绳的一端，绳穿过一竖直的管子，一手握管，另一手执绳。用力向下拉绳，发现：



$$\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{r}_1$$

即 $$m\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{r}_2 = m\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{r}_1$$

表明小球对圆心的角动量保持不变。

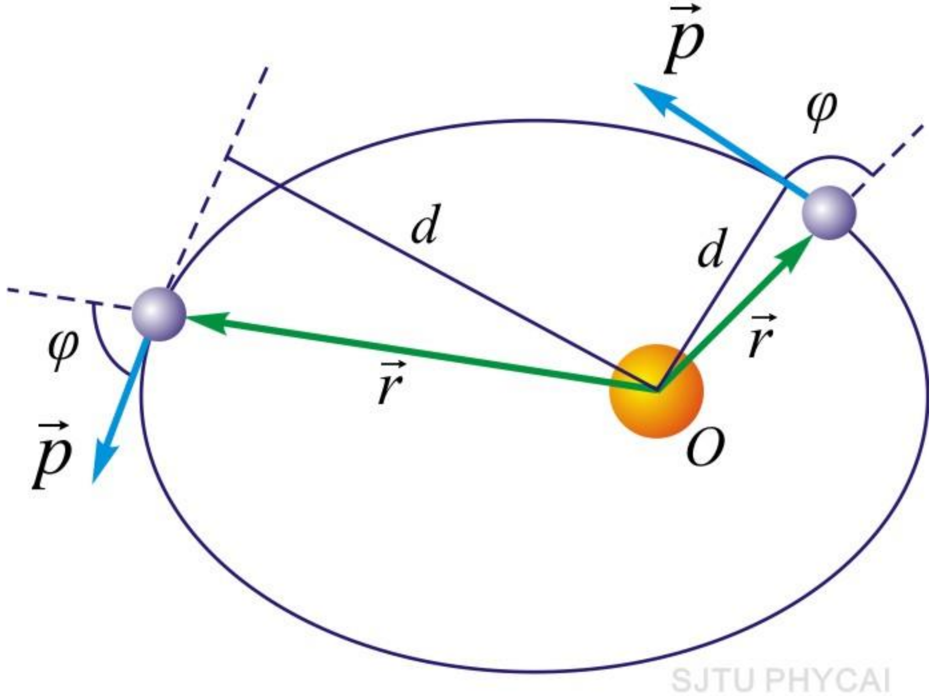
解释：作用在小球上的有心力对力心的力矩为零，故小球的角动量守恒。

行星绕太阳的运动：

作用在行星上的万有引力（有心力）对太阳（力心）的力矩为零，因此，行星在运动过程中，对太阳的角动量保持不变。

$$\vec{r} \times \vec{p} = \text{常矢量}$$

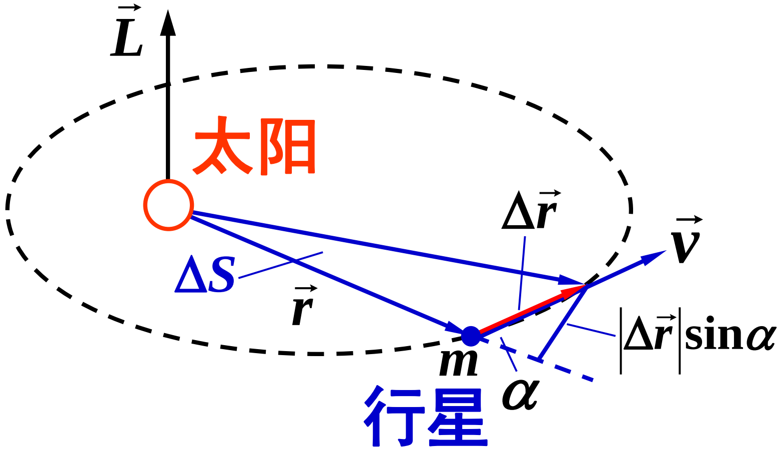
$$pd = \text{常量}$$



- 在有心力场中，对于力心的角动量守恒。

  可以推得开普勒第二定理。

例： 证明开普勒第二定律：行星相对太阳的矢径在相等的时间内扫过相等的面积。



10.10 质点系的角动量定理

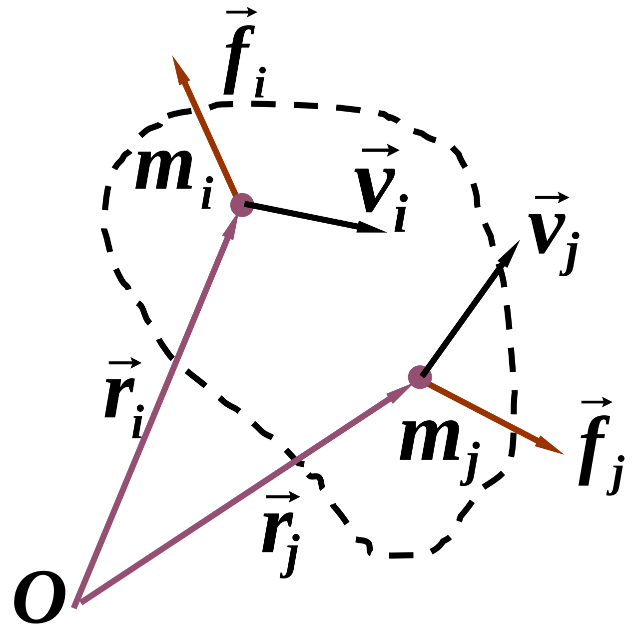
一个质点系所受的合外力矩，等于该质点系的总角动量对时间的变化率

$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

合外力矩： $\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i$

总角动量： $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$

它们都对惯性系中同一定点定义。

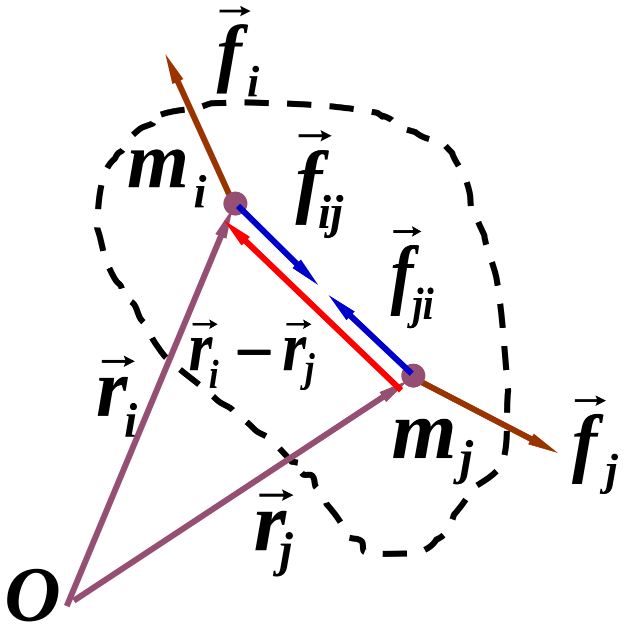


质点的角动量定理→质点系的角动量定理：

$$\vec{r}_i \times \left(\vec{f}_i + \sum_{j(\neq i)} \vec{f}_{ij} \right) = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t}$$

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i + \underline{\sum_i \sum_{j(\neq i)} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_i \vec{L}_i$$

合内力矩为零



$$\overrightarrow{r_i} \times \overrightarrow{f_{ij}} + \overrightarrow{r_j} \times \overrightarrow{f_{ji}} = \overrightarrow{r_i} \times \overrightarrow{f_{ij}} - \overrightarrow{r_j} \times \overrightarrow{f_{ij}} = \left(\overrightarrow{r_i} - \overrightarrow{r_j}\right) \times \overrightarrow{f_{ij}} = 0$$

- 矢量叉乘服从分配律：$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$
- 两个平行或反平行的矢量的叉积为零（平行四边形面积为零）

即证。

一对内力对于同一参考点的合力矩为零

◆ **内力矩可影响质点系中某质点的角动量，但合内力矩等于零，对总角动量无影响。**

质点系的角动量守恒定律

当质点系相对于惯性系中某定点所受的合外力矩为零时，该质点系相对于该定点的角动量将不随时间改变

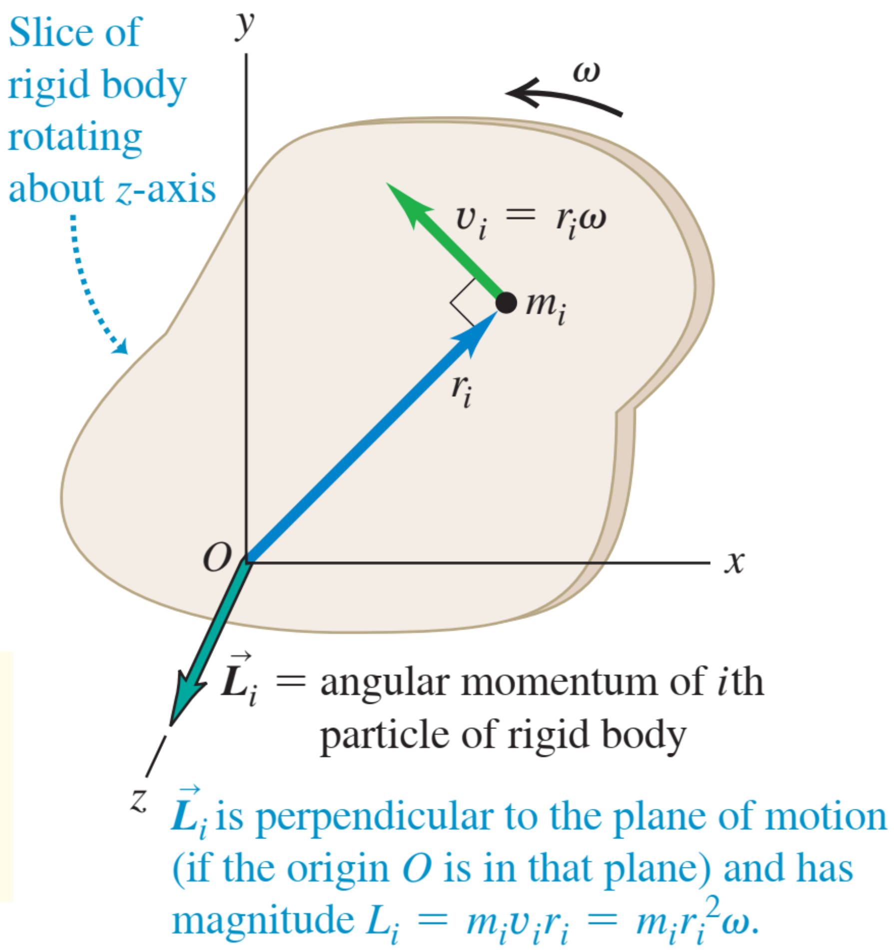
孤立或在有心力作用下的系统角动量守恒。

宇宙中的天体可以认为是孤立体系。它们具有旋转盘状结构，成因是角动量守恒。

10-11 刚体的角动量

$$L_i = m_i(r_i\omega)\,r_i = m_i {r_i}^2\omega$$

$$L = \sum L_i = \left(\sum m_i {r_i}^2\right)\omega = I\omega$$



Angular momentum of a rigid body rotating around a symmetry axis

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

Moment of inertia of rigid body about symmetry axis

Angular velocity vector of rigid body

For a system of particles:

Sum of external torques on the system

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Rate of change of total angular momentum $\vec{L}$ of system

刚体的角动量定理: 质点在$t1 \rightarrow t2$时间内所受合外力矩的冲量矩等于该段时间内刚体角动量的增量

10.12 刚体的角动量守恒定律

$\sum \vec{\tau} = d\vec{L}/dt$. If $\sum \vec{\tau} = \mathbf{0}$, then $d\vec{L}/dt = \mathbf{0}$, and $\vec{L}$ is constant.

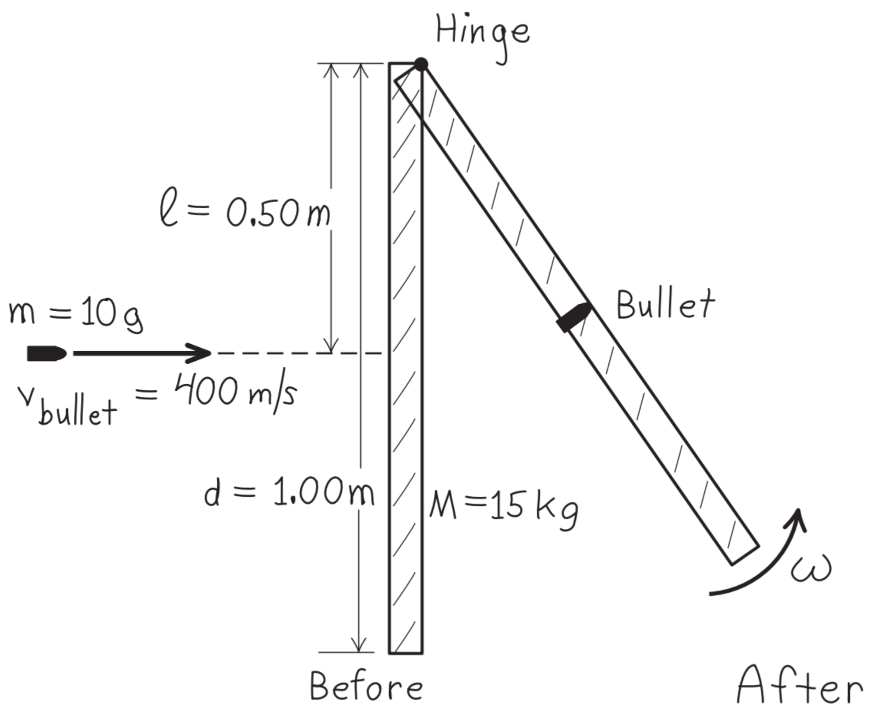
CONSERVATION OF ANGULAR MOMENTUM When the net external torque acting on a system is zero, the total angular momentum of the system is constant (conserved).

若体系所受的合外力矩为零, 则体系的总角动量保持不变

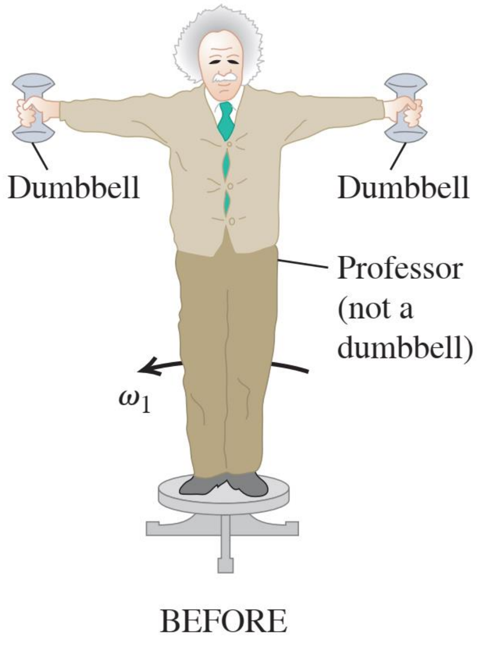
- 角动量定理适用于一切转动问题,大至天体,小至粒子、电子...
- 角动量守恒定律和能量守恒、动量守恒一样是普适的守恒律，适用于从星系到微观粒子的一切物体

例:

A door 1.00 m wide, of mass 15 kg, can rotate freely about a vertical axis through its hinges. A bullet with a mass of 10 g and a speed of 400 m/s strikes the center of the door, in a direction perpendicular to the plane of the door, and embeds itself there. Find the door's angular speed. Is kinetic energy conserved?



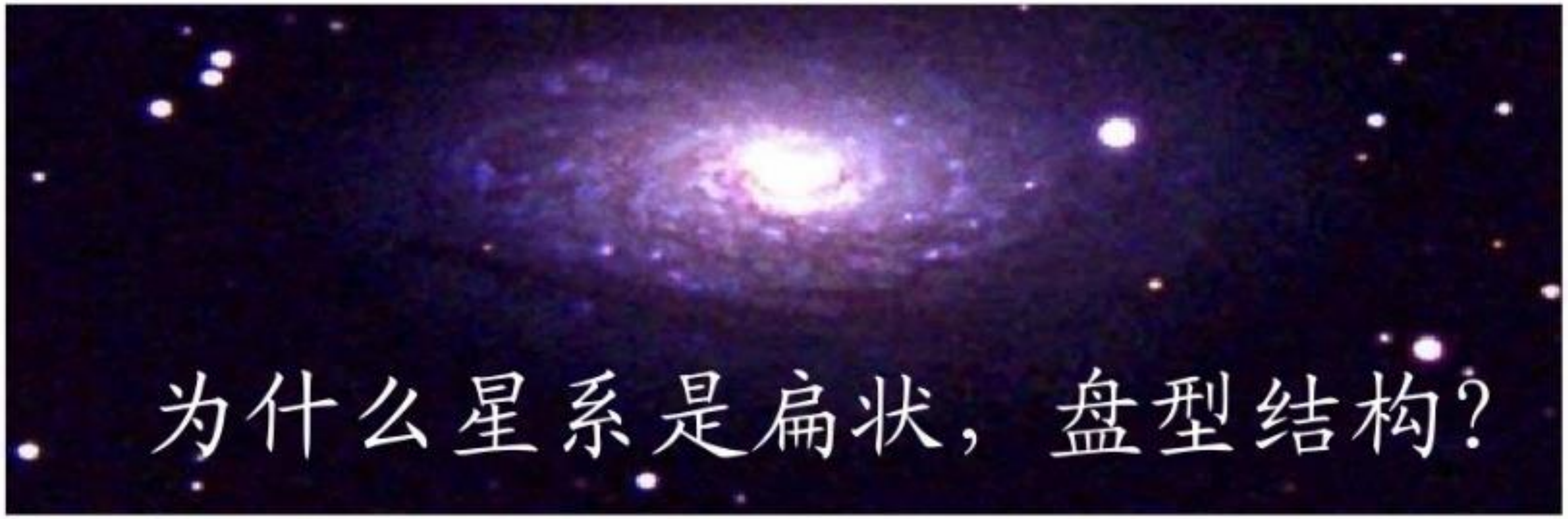
角动量守恒的实验



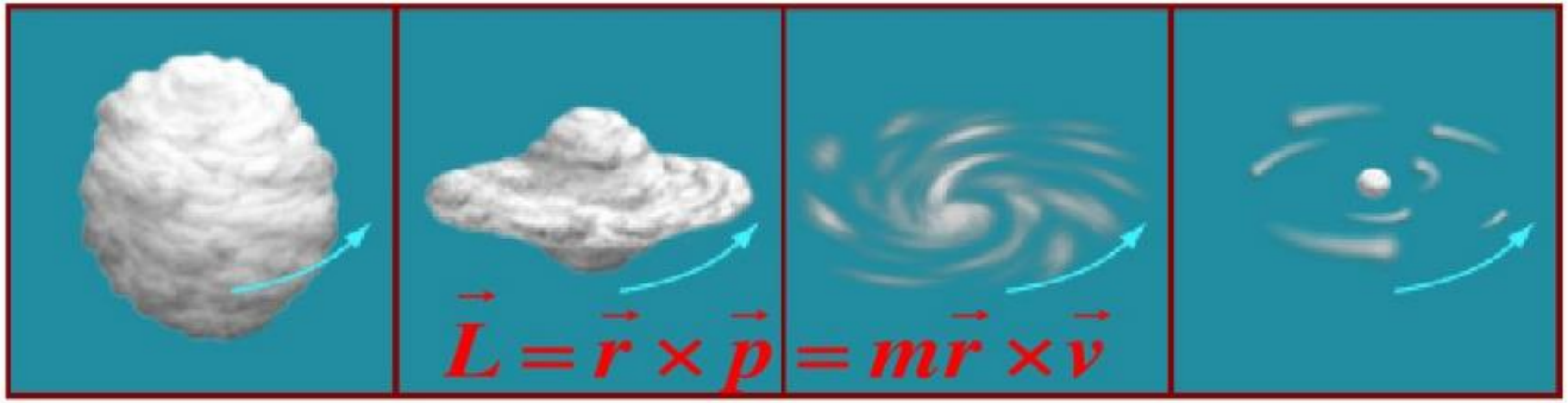
角动量守恒的分量

角动量守恒也是一个矢量关系，它包括三个不变的量，若合外力矩在x、y、z三个方向的分量分别为零，则分别有

$$L_x = \text{不变量}, \quad L_y = \text{不变量}, \quad L_z = \text{不变量}$$



18世纪哲学家提出星云说，认为太阳系是由气云组成的。气云原来很大，由自身引力而收缩，最后聚集成一个个行星、卫星及太阳本身。但是万有引力为什么不能把所有的天体吸引在一起而是形成一个扁平的盘状？

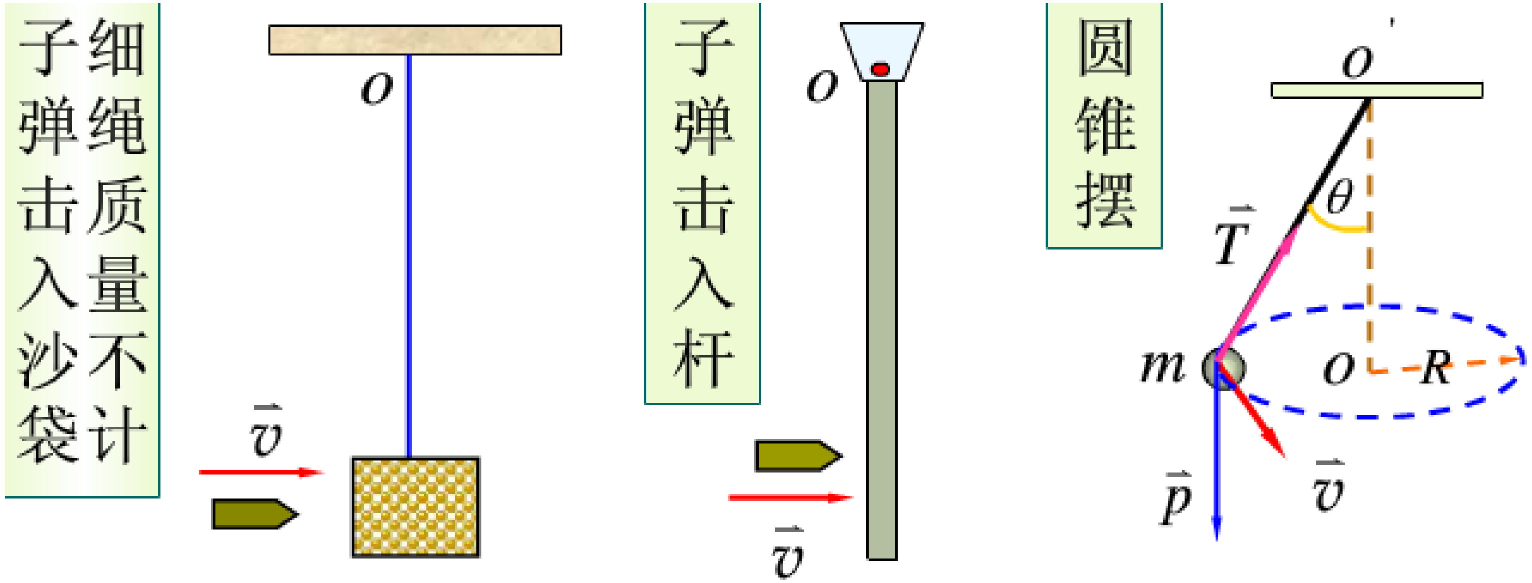


$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

康德认为除了引力还有斥力，把向心加速的天体散射到一个方向。19世纪数学家拉普拉斯完善了康德的星云说，*指出旋转盘状结构的成因是角动量守恒。*

角动量守恒也是一个独立的规律，即它并不包含在能量守恒和动量守恒规律中。

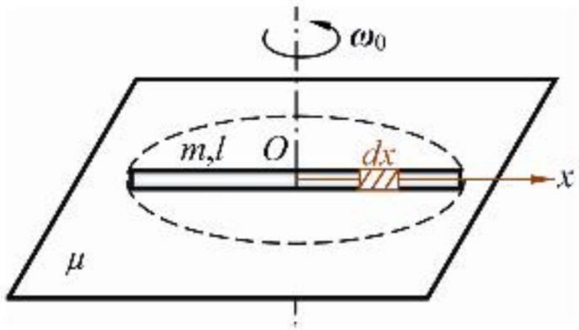
例：系统的动量、角动量、动能是否守恒



	以子弹和沙袋为系统	以子弹和杆为系统	圆锥摆系统
动量:			
角动量:			
机械能:			

HW #1

2-28．如图所示，一均匀细杆长为l，质量为m，平放在摩擦系数为μ的水平桌面上，设开始时杆以角速度ω_0绕过中心O且垂直与桌面的轴转动，试求：（1）作用于杆的摩擦力矩；（2）经过多长时间杆才会停止转动。



HW #2

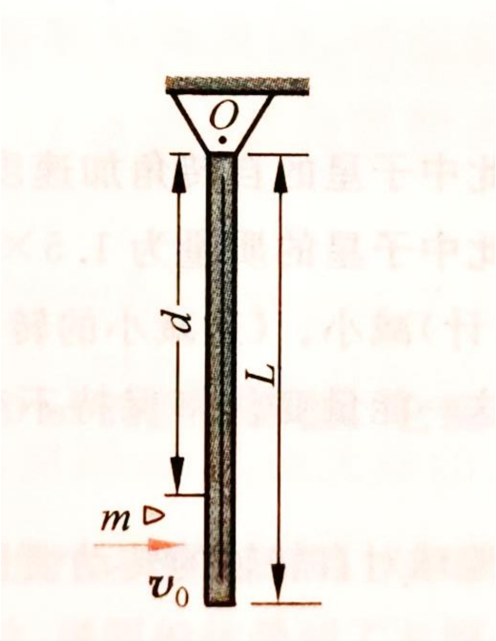
一根均匀米尺,在60cm刻度处被钉到墙上,且可以在竖直平面内自由转动。先用手使米尺保持水平,然后释放。求刚释放时米尺的角加速度和米尺到竖直位置时的角速度各是多少?

HW #3

图中均匀杆长L=0.40 m,质量 M=1.0kg,由其上端的光滑水平轴吊起而处于静止。今有质量m=8.0g的子弹以v_0=200 m/s的速率水平射入杆中而不复出,射入点在轴下d=3L/4处。

求:(1)子弹停在杆中时杆的角速度;

(2)杆的最大偏转角。



HW #4

一个质量为 M,半径为R的水平均匀圆盘可绕通过中心的光滑竖直轴自由转动。在盘缘上站着一个质量为m的人,二者最初都相对地面静止。当人在盘上沿盘边走一周时, 盘对地面转过的角度多大?