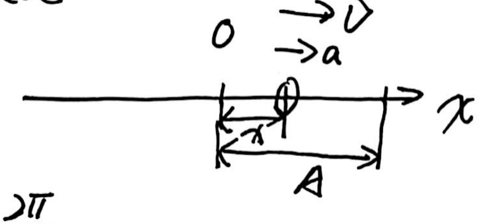
振动

简谐运动：质点运动时，如果离开平衡的位移x（或角位移θ）按正（余）弦规律随时间变化

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$



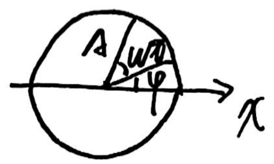
A：振幅　　ω：角频率　　$\omega = \frac{2\pi}{T}$

频率：$\nu = \frac{1}{T} \Leftrightarrow \omega = 2\pi\nu \Rightarrow x = A\cos(2\pi\nu t+\varphi)$

对于该式有：$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$，$v = -\omega A\sin(\omega t+\varphi)$

则有：简谐运动加速度与位移成正比而反向

简谐与圆匀有关联：



$$x = \rho\cos\theta = A\cos(\omega t+\varphi)$$

$(\omega t+\varphi)$称为时刻t振动的相位；$t=0$时，φ为初相

对于 $\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{cases}$　$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

$\Delta\varphi = 0$：同相；$\Delta\varphi = \pi$：反相；其他值：不同相

$a = -\omega^2 x$，i.e.，$F = -m\omega^2 x$，这样的力称为回复力

反过来推：若已知$F = -kx$，则作简谐，$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$，同时：$t=0$下已知$x_0$与$v_0$

因 $x_0 = A\cos\varphi$，$v_0 = -\omega A\sin\varphi$

$\therefore A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$，$\varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$

△注意到：对于同 x_0 下，v_0 方向决定了 φ 值；否则 v_0 未知下，只能求出 φ 有两种可能值（if $\varphi \in [0, 2\pi]$）

单摆的简谐：

$f_t = -mg\sin\theta$，$\theta \to 0$，$\sin\theta \approx \theta$

$\therefore f_t = -mg\theta$ 则 $k = mg$

$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$　$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

△：在稳定位置附近的微小振动为简谐运动。

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \left[\frac{1}{m}\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=0}\right]^{1/2}$$

简谐能量：$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$（以弹簧振子为例）

而 $\begin{cases} E_p = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi) \\ E_k = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi) \end{cases}$　$\therefore E = \frac{1}{2}kA^2$　$(\omega^2 = k/m)$

$\overline{E_p} = \frac{1}{T}\int_0^T E_p dt = \frac{1}{4}kA^2$，$\overline{E_k} = \frac{1}{T}\int_0^T E_k dt = \frac{1}{4}kA^2$

（如：$\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,dt = \pi/4$，$\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt = \frac{\pi}{2}$）

阻尼：简谐有时受阻力，且与速度成正比：

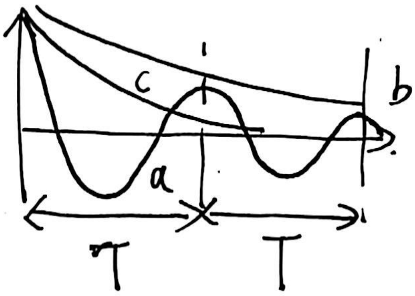
$$f_r = -\gamma v = -\gamma\frac{dx}{dt}$$

则 $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt}$

令 $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$　$2\beta = \frac{\gamma}{m}$，则 β 为阻尼系数

解有：$x = A_0e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0)$

其中, $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$, $T=\frac{2\pi}{\omega}$



a. 欠 b 过 c. 临界

用次数来衡量品质:

$Q=2\pi\frac{\tau}{T}=\omega\tau$, $\tau=\frac{1}{2\beta}$

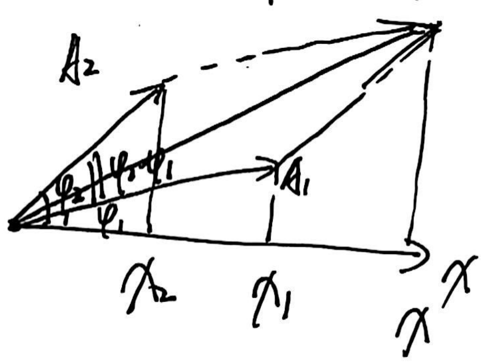
τ为能量减小至$1/e$倍所用时间

同一直线上同频率的简谐合成:

同直线 $\begin{cases} x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{cases}$

$$x=x_1+x_2=A\cos(\omega t+\varphi)$$

则 $\begin{cases} A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)} \\ \tan\varphi=\dfrac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2} \end{cases}$



$\Rightarrow$ 一清二楚

若: ① $\varphi_2-\varphi_1=2k\pi$

$A=A_1+A_2$

② $\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi$

$A=|A_1-A_2|$

同一直线上不同频率的简谐合成

$\begin{cases} x_1=A\cos(\omega_1 t+\varphi) \\ x_2=A\cos(\omega_2 t+\varphi) \end{cases}$

$$x=x_1+x_2=2A\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\,\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi\right)$$

若ω_1. ω_2相差大, 则 $\omega_2-\omega_1 \ll \omega_2+\omega_1$

因此振幅可视为 $\left|2A\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right|$

ω可视为 $\frac{\omega_2+\omega_1}{2}$; 单位时间内振动增强/减弱次数为拍频:

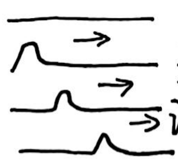
拍频: $\nu=2\times\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)=\frac{\omega_2}{2\pi}-\frac{\omega_1}{2\pi}=\nu_2-\nu_1$

机械波

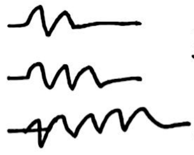
横波：质元振动方向与波传播方向垂直　　纵波：平行

↓传播本质是能量传播

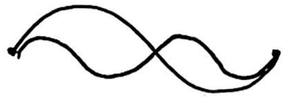
行波：



脉冲波



连续波



驻波

数学描述：

设平面波沿x轴正向传播，质元沿y轴振动

$y=f(t-\frac{x}{v})$，其中原点处振动：$y_0=f(t)$.

↓ x处 t时刻 质元振动

平面简谐波：$y_0=A\cos(\omega t+\varphi)$ 则 x,t处y振动：

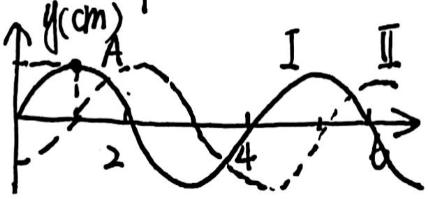
$$y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{v})+\varphi]，\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

简谐波描述物理量：空间：波长λ，波数 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$（单位长度波相位变化）

时间：周期T　频率f．角频率：$\omega=2\pi f$

波速：$v=\frac{\lambda}{T}=\lambda f=\frac{\omega}{k}$，则：$A\cos(\omega(t-\frac{x}{v})+\varphi)=A\cos(\omega t-kx+\varphi)$

例：



求波表达式，并求原点振动式（$T>1s$）

（$\frac{1}{2}s$后，Ⅰ⇒Ⅱ）

有：$A=0.01m$，$\lambda=0.04m$，$v=\frac{\lambda}{T}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{0.01m}{0.5s}=0.02m/s$

$T=\frac{0.04m}{0.02m}=2s$，$\omega=\pi$，初：$A\cos(\omega t+\varphi)$，$0=A\cos\varphi$，$\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$

而：又原点初时振动向下，故 $\varphi=\frac{\pi}{2}$（$\sin\varphi>0$）

$\therefore y_0=0.01\cos(\pi t+\frac{\pi}{2})$

弦上横波：

线密度μ

张力F（不变）

则 $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$　线密度　线拉力

平面简谐波功率：$P_{av}=\frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\,\omega^2A$

而势能：$\Delta E_p = \frac{1}{2} F \Delta x k^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx)$.

能量变化（相比于平衡态）

动能：$\Delta E_k = \frac{1}{2} \mu \Delta x \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx)$.

又：$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ $\therefore \Delta E_p = \Delta E_k$，$\Delta E = \Delta x \mu \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx)$.

波的干涉现象：若频率相同，振动方向相同，相位差恒定相遇后一些点振动始终加强，一些始终减弱

$y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1 - kr)$ 　　则 $y = y_1 + y_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$

$y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2 - kr)$

where：$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi$，$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 - k(r_1 - r_2)$.

$r_2 - r_1 = \pm n\lambda$：相长 　　$r_2 - r_1 = \pm(2n+1)\frac{\lambda}{2}$ 相消

驻波：A同 f同（ω同），振动方向相同的波从相反方向传播，叠加而形成

$y_1 = A\cos(\omega t - kx)$ 　　$y = 2A\cos kx \cos\omega t$

$y_2 = A\cos(\omega t + kx)$

$kx = \pm n\pi$：有max振幅：腹；最小：节. $kx = \pm(2n+1)\frac{\pi}{2}$

简正模式：$n \cdot \frac{\lambda}{2} = L$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{2L}$，$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{L}$

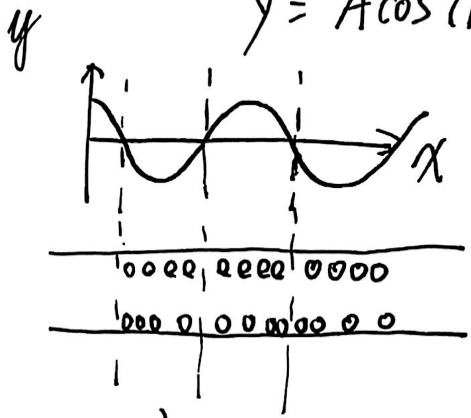
声波与听力：Sound & hearing

声波是纵波，传波方向与振荡方向同向

考虑 $y(x,t)$ ⇒ 任意位置小元相对于平衡位置的位移，分

$$y = A\cos(kx-\omega t)$$

Figure:



$y>0$，靠右

弹性细棒中纵波的波动方程和波速：$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{Y}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

∴声速为：$v=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$，ρ为棒体密度，Y为杨氏模量

△ 横波：$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$.

纵波的能量：设波在体密度为ρ的弹性介质中传播，在波线上x处取一个体积元dV，则t时刻：

$$y=A\cos\omega(t-\frac{x}{v}),\quad v_y=\frac{\partial y}{\partial t}=-\omega A\sin\omega(t-\frac{x}{v})$$

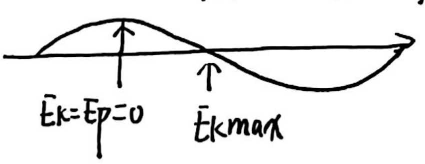
$$dE_k=\frac{1}{2}(dm)v^2=\frac{1}{2}\rho dV A^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{v})$$

弹性势能：$\frac{1}{2}\rho A^2 dV\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{v})$

∴体积元总能量：$\rho dV A^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{v})$

$E_k=E_p$ 随时间周期性变化，$T'=T_{波动}/2$

振动中动能与势能相位差为$\pi/2$，波动中动能与势能相同



波动能量随时间变化，振动系统的机械能保持恒定

能量密度：单位体积介质中的波动能量

$\varepsilon = \frac{dE}{dV} = \rho \cdot A^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{v})$ 可见随时间作周期性变化

平均：$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \rho A^2\omega^2\underbrace{\overset{1/2}{\sin^2\omega(t-\frac{x}{v})}dt} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$

能流密度：（波的强度）（声强）

单位时间通过垂直于波传播方向上单位面积的平均能量

$I = v\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 v$ 单位：W/m^2，

测定声强级（I.L）的特定单位为"贝尔"，更常用dB，1贝尔=10dB

I.L（强度级）$= 10\lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$ I_0为人类听到的最小平均强度

$I_0 = 1\times10^{-12}\, W\cdot m^{-2}$

i.e., $I = I_0\cdot 10^{I.L/10}$, eg. I.L. = 115dB, $I = 10^{-12}\times10^{11.5} = 0.316\ W/m^2$

多普勒效应：若波源、观察者运动在连线上，波源$f, \lambda, \underline{v}$

若二者相对于介质静止时，显然 $f = v/\lambda$ 波在介质中传播速度为v

但：

① $\vec{v_s}=0$ $f_L = \frac{v+v_L}{\lambda} = \frac{v+v_L}{v} f_s$ （波源静止）

② $\vec{v_L}=0$. $f_L = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{v-v_s} f_s$

③ 均动：$f_L = \frac{v+v_L}{v-v_s} f_s$，且若S.L运动不在二者连线上

$$f_L = \frac{v+v_L\cos\theta_L}{v-v_s\cos\theta_s} f_s$$

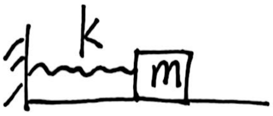
若$v_{波源} > v$呢？ 上述计算无意义，$\sin\alpha = \frac{v}{v_s}$

α为马赫锥顶角

振动：核心：找 $\ddot{x}+\omega^2x=0$ 表达式，便有 ω 了

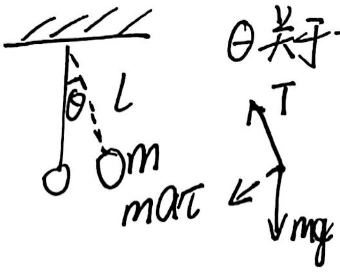
且可以看出：ω 与输入能量等无关，只与 $\ddot{x}+\omega^2x=0$ 式有关

E可影响振幅



有 $m\cdot\overset{a}{\frac{d^2x}{dt^2}}=-kx$，则 $\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$，$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

又例：θ关于t呢？



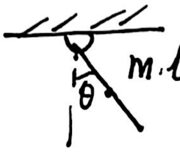
$-mg\sin\theta=m\cdot a_\tau=m\cdot l\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2}$

$\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$ （$T=\frac{2\pi}{\omega}$）

$\theta\to0$，$\sin\theta\to\theta$ $\therefore -g\theta=l\ddot{\theta}$

$\ddot{\theta}+\frac{l}{g}\theta=0$，则 ω 角频率 $\sqrt{\frac{l}{g}}$，$T=2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$

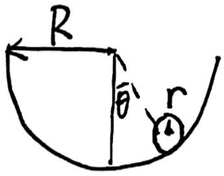
又例：换为刚体：杆，m，l 力矩 $-mg\cdot\frac{l}{2}\cdot\sin\theta=\underbrace{\frac{1}{3}ml^2}_{\text{转动惯量}}\ddot{\theta}$



$\ddot{\theta}+\frac{3g}{2l}\theta=0$. $\omega=\sqrt{\frac{3g}{2l}}$ （复摆）

也可用机械能守恒列式：$E=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{2}{5}mr^2}\omega^2+mg(R-r)(1-\cos\theta)$

球滚动（ω为转动角速度）



$v_c=(R-r)\dot{\theta}$，$v_c=\omega r$ （两边求导）

$\ddot{\theta}+\frac{5g}{7(R-r)}\theta=0$

振幅，配平能量

初相，看[illegible]

有了 ω，求振动表达式无脑套：$A\cos(\omega t+\varphi_0)=x$

$v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$，$a=-\omega^2A\cos(\omega t+\varphi)$

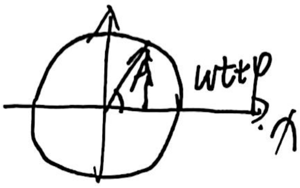
有初始条件：x_0 与 v_0，那么知 ω 后，可以求 A & φ：

$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$，$\varphi=-\arctan\frac{v_0}{\omega x_0}$

整个振动机械能：$E=\frac{1}{2}kA^2$，动能与势能相反步调

（弹簧振子）

最后，参考圆可助于看 x&t:



在 x 轴上投影即为 $x_t = A\cos(\omega t+\varphi)$

之前 $\omega^2 x+\ddot{x}=0$ 解 ω，还可以从另一视角解：

若 $F=-kx$ ，i.e.，F 与 x 呈正比关系，则 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

Eg: 数轴 x 上 $-a$ 处为 $-Q$，0，a 处为 Q，q 在 0 附近。 Q. q 同种电荷

$$F = k\frac{Qq}{(a+x)^2} - \frac{kQq}{(a-x)^2}$$，因为 x 小，则 $\frac{x}{a}\approx 0$

$(x\to 0，(1+x)^a-1 \sim ax)$

$$\therefore F = kQq\left(\frac{1}{a^2(1+\frac{x}{a})^2}-\frac{1}{a^2(1-\frac{x}{a})^2}\right)$$

$$=\frac{kQq}{a^2}\left(1-\frac{2x}{a}-1-\frac{2x}{a}\right) = -\frac{4kQq}{a^3}x \quad \therefore \omega=\sqrt{\frac{4kQq}{ma^3}}$$

阻力振动：除了 $\underbrace{外力F}_{(回复力)}$，还有与 v 相关阻力： （复数法）

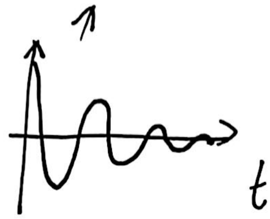
$f=-\gamma\frac{dx}{dt}$，$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-\gamma\frac{dx}{dt}$，设 $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$，$\frac{\gamma}{m}=2\beta$

$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega^2x=0$，设 $x=Ae^{i(\omega t+\varphi)}$，代入：

$-\omega^2+i\cdot 2\beta\omega+\omega_0^2=0$，$\omega=\pm\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}+i\beta$ 虚

若 $\omega_0>\beta$，设一个 ω 为：$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}+i\beta$，代入 x：

$Ae^{i(\omega t+\varphi)}$ 的 $i(\omega t+\varphi) = -\beta t+\left[i\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t+\varphi\right]$



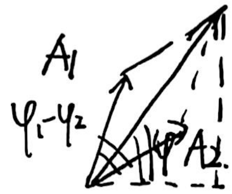
$\mathrm{Re}\{x\}= Ae^{-\beta t}e^{i(\cdots)} = Ae^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t+\varphi)$

若 $\beta>\omega_0$，$\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}=\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,i$，$\omega=i(\beta\pm\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})$

$i(\omega t+\varphi)=i\varphi-(\beta\pm\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t)$，$\mathrm{Re}\{x\}=A_1e^{-\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}+A_2e^{-\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}$

若 $\beta=\omega_0$，$\omega=i\beta$，$\tilde{x}=(A_1+A_2 t)e^{-\beta t}$，在临界停下（$\tilde{x}\to 0$）

最后：振动的合成



同 ω

$x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$

$x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$

$x=x_1+x_2$

$$\tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

若 $\varphi_1-\varphi_2=2k\pi$：同相 $\Rightarrow A_1+A_2$

$\varphi_1-\varphi_2=(2k+1)\pi$：反相

则 $|A_1-A_2|$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

不同 ω：

$x_1=A\cos(\omega_1 t+\varphi)$

$x_2=A\cos(\omega_2 t+\varphi)$

频率主导

$$x=x_1+x_2=2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi\right)$$

则 $\omega=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$，振幅：$\left|2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)t\right|$

振幅随 t 变化！这便是拍频，定义 $\Delta\omega=|\omega_2-\omega_1|$

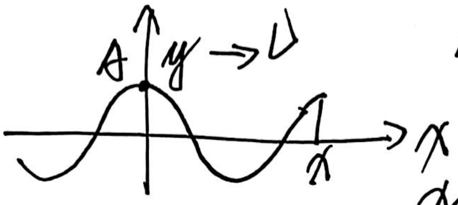
$\nu=\frac{1}{2\pi}|\omega_2-\omega_1|=|\nu_2-\nu_1|$，$\nu$ 为 frequency

上述均为同相，$x=x_1+x_2$；若不在同一直线？略 (out of scope)

波动：（机械波） 要介质、波源

横波 行波

波动方程：振动中 $\ddot{x}+\omega x=0$，$F=-kx$



A为波源. A振动：$y=A\cos(\omega t+\varphi_0)$

它会带动其它点动，但有延迟

x处点振动与A不同

$\Delta t=\frac{x}{v}$，则延后为$\frac{x}{v}$ $\quad y(x,t)=A\cos(\omega(t-\frac{x}{v})+\varphi_0)$

波长λ：一个完整周期长度，$v=f\cdot\lambda$，定义$k=\frac{\omega}{v}$为波数

$k=\frac{\omega}{v}=2\pi f\cdot\frac{1}{f\lambda}=\frac{2\pi}{\lambda}$，$\frac{1}{\lambda}$可以理解为：单元长度内周期个数

∴ $y=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$, denoted as u, i.e., $u=y$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial y}{\partial t}=-\omega A\sin(\omega t-kx+\varphi_0)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\omega^2A\cos(\omega t-kx+\varphi_0),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-k^2A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0}$$

这便是波动方程核心！它很类似于 $\ddot{x}+\omega x=0$

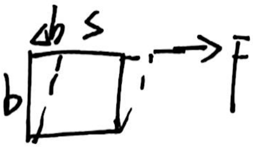
用上述模板分析，可以推一些弹性介质中波速公式的推导

拉应变

① 

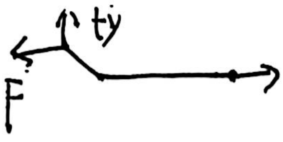
$\frac{F}{S}=Y\frac{\Delta l}{l}=Y\cdot\frac{du}{dx}$，$v=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$

杨氏模量

② 切应变 

$\frac{F}{S}=G\frac{\Delta b}{b}$，$v=\sqrt{\frac{G}{\rho}}$ ④

切变模量

弦上横波:  F，$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$，μ为线密度

在波动中: $dE_k=dE_p$，无机械能守恒

$\Delta E_p=\Delta E_k=\frac{1}{2}\Delta x\mu\omega^2A^2\sin^2(\omega t-kx)$，$\Delta E=\Delta x\mu\omega^2A^2\sin^2(\omega t-kx)$

弦上横波功率: $P_{av}=\frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\omega^2 A$

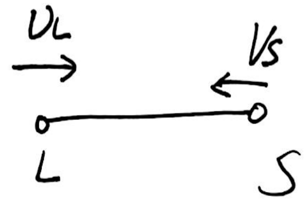
驻波: $u_1=A\cos(\omega t-kx)$ $u_2=A\cos(\omega t+kx)$.（振动方向同.反方向传）

$u=u_1+u_2=2A\cos kx\cos\omega t$，不会传播!

$kx=n\pi$: 有max振幅，波腹；$kx=\pm(2n+1)\frac{\pi}{2}$，波节

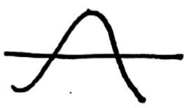
简正模式: 两端定死，则 $l=\frac{\lambda}{2}n$，$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$

$\lambda=\frac{2l}{n}$，$f=\frac{v}{\lambda}=\frac{nv}{2l}$，则$\frac{v}{2l}$为基频

多普勒效应: $f_L=\frac{v+v_L}{v-v_s}f_s$，

L 弦上

△驻波能量分析: ⑤

振至最大位移时，，有a无v 故无E_k.

而有势能，集中于波节；至平衡位置时 ，

有v无a，无势能有E_k，集中于波腹

温度与热量：

第零定律：若B.C与A同时达到热平衡，则B.C也处于热平衡

理想气体方程：$pV=nRT$，温度仅取决于气体的共同性质

$T_K=T_C+273.15$

热量定义：仅由于温度差而发生的热量传递称为热传递，以此方式传递的能量称为热量Q

卡路里(cal)：将1g水从14.5°C→15.5°C所需能量

(比)热容：$C=\lim_{T\to0}\frac{Q}{T}$　$C_m=C/n$（摩尔）

$C_{比}=C/m$

热辐射：受热的物体会辐射电磁波，强度和强度按频率分布与辐射体温度与性质有关。若辐射体对电磁波吸收与辐射达到平衡，则热辐射特性只取决于温度

热辐射速率H与温度T关系：$\boxed{H=Ae\sigma T^4}$

常量（斯特藩）

辐射面面积　比辐射率

净热辐射速率$H_{net}=\boxed{Ae\sigma(T^4-T_s^4)}$ → 环境温度.

热学性质：根据系统与环境关系，可分类如下：

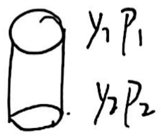
孤立：m× Q×　　封闭：m× Q√

开放：m√ Q√　　绝热：Q×

热力学平衡态必要条件：力学&热&质量平衡条件

$pV=nRT \Rightarrow pM=\rho RT$　　R：气体常数.

重要例题：求大气层气压随高度变化，设所有海拔 $T=0°C$

考虑：

依流体力学：

$$p_1+\rho g y_1+\cancel{\frac{1}{2}\rho v_1^2}=p_2+\rho g y_2+\cancel{\frac{1}{2}\rho v_2^2}$$

则

$$\therefore \rho(y_1-y_2)g=p_2-p_1$$

$$\rho g=\frac{p_2-p_1}{y_1-y_2},\quad \rho g=-dp/dy,\quad \rho=\frac{pM}{RT}$$

$$\therefore \frac{dp}{dy}=-\frac{pM}{RT}g,\quad \int_{p_1}^{p_2}\frac{1}{p}dp=-\frac{Mg}{RT}\int_{y_1}^{y_2}dy$$

$$\ln\frac{p_2}{p_1}=-\frac{Mg}{RT}(y_2-y_1)\quad \therefore \frac{p_2}{p_1}=e^{-Mg(y_2-y_1)/RT}$$

平均碰撞频率：$\bar{z}=\sqrt{2}\pi d^2\bar{v}n_V$

平均自由程：气体单个分子连续两次同其它分子碰撞之间通过的距离：

$$\bar{\lambda}=\bar{v}/\bar{z}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_V}$$

玻尔兹曼常数.

则 $\frac{1}{2}m(v^2)_{av}=\frac{3RT}{2N_A}$，$\boxed{k=\frac{R}{N_A}}=1.381\times10^{-23}J/mol\cdot K$

$$\therefore \frac{1}{2}m(v^2)_{av}=\frac{3}{2}kT$$

因此若只考虑平动，O_2平均动能与平均速度是多少？

$v_{rms}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}$，$\frac{1}{2}m(v^2)_{av}=\frac{3}{2}kT$（实则$\frac{5}{2}kT$，但说了只看平动）

Maxwell-Boltzman distribution function:

$$\boxed{f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}v^2e^{-\frac{mv^2}{2kT}}}$$

$v_{rms}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}$，最概然：$\frac{df(v)}{dv}=0$ $v_p=\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}=\sqrt{\frac{2Tk}{m}}$

平均速率（期望）：$\bar{v}=\int_0^\infty vf(v)dv=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$

类似地：$\overline{v^2}=\int_0^\infty v^2f(v)dv=\frac{3kT}{m}=\frac{3RT}{\mu}$，$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=v_{rms}$

则理想气体分子平均动能：$\bar{\varepsilon}_k=\frac{1}{2}m\overline{v^2}=\sum\frac{1}{2}m\overline{v_{x,y,z}^2}=\frac{3}{2}kT$

$\therefore$ 系统分子每个自由度都有相等的平均动能为 $\frac{kT}{2}$

那么分子自由度有多少？单原子：3 ⇒ $\frac{3}{2}R = C_V$（摩尔定容热容）.

→ $\bar{\varepsilon}_k = \frac{3}{2}kT$

→ 总内能 $\frac{3}{2}\nu RT$.

双原子分子：5 ⇒ $C_V = \frac{5}{2}R$

→ $\bar{\varepsilon}_k = \frac{5}{2}kT$

→ $\frac{5}{2}\nu RT$.

ν 即为 n. 物质的量

重要例题：一容器中间隔板分为二半，一半He，250K；一半O_2，310K，两者压强相等，求去掉隔板后混合的温度：

同 $pV=\nu RT$　He $\nu_1 T_1 = \nu_2 T_2$ O_2，$E_{总} = \frac{3}{2}\nu_1 RT_1 + \frac{5}{2}\nu_2 RT_2 = \frac{8}{2}\nu_1 RT_1$

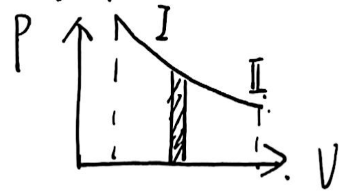
后：T为T，$E = \frac{3}{2}\nu_1 RT + \frac{5}{2}\nu_2 RT = \left(\frac{3}{2} + \frac{5T_1}{2T_2}\right)\nu_1 RT$ //

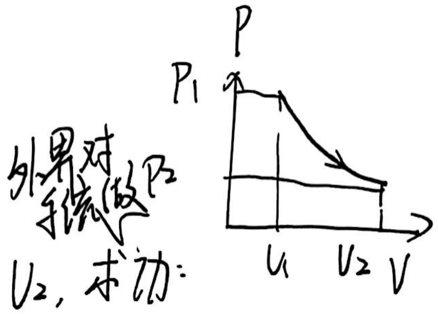
$\therefore T = \frac{8T_1}{3+5T_1/T_2} = 284K$

热力学第一定律

气体被压缩时，外界对系统做正功，反之负功

$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV$：





Eg：ν mol 理想气体T不变，体积 $V_1 \to V_2$，求功：

$pV=\nu RT$，则 $W = -\int_{V_1}^{V_2} p\,dV = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} dV = -\nu RT \ln\frac{V_2}{V_1} < 0$

（V↑，气体做正功，外界做负功）.

绝热方程：$pV^{\gamma} = C_1$，$TV^{\gamma-1} = C_2$　$p^{\gamma-1}T^{-\gamma} = C_3$

气体摩尔定压热容为 $C_{p,m} = \frac{i}{2}R + R$　定压，直接 $\int_{V_1}^{V_2} p\,dV$

而××定体热容 $C_{V,m}$；$T_1 \to T_2$，则 $\Delta E = E_2 - E_1 = \nu\int_{T_1}^{T_2} C_{V,m}\,dT$.

$C_{V,m} = \frac{i}{2}R$　　$C_p = C_V + R$

$\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{C_p}{C_V}$　理想气体内能改变可由定体热容求得

$C_{p,m}$: 等压 a→b 过程 吸收热量: $C_{p,m}(T_b-T_a)=\frac{i+2}{2}R(T_b-T_a)$

$C_{V,m}$: 等体 a→b 过程 吸热: $C_{V,m}(T_b-T_a)=\frac{i}{2}R(T_b-T_a)$

↳ 等体: $pV=nRT$, 由于不做功, 吸热直接反映为内能变换

∴ $Q=C\cdot\Delta T\cdot n(\nu)$.

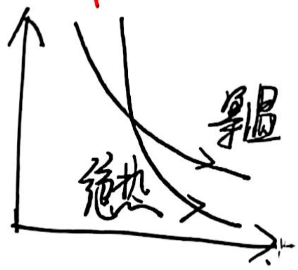
内能与热力学第一定律: $\Delta U=U_f-U_i=W_a$

外界在绝热过程中对系统所做的功转换成了系统的内能

$TV^{\gamma-1}=C_1$ $\quad pV^{\gamma}=C_2$ $\quad \frac{p^{\gamma-1}}{T^{\gamma}}=C_3$ 绝热过程中关键性质

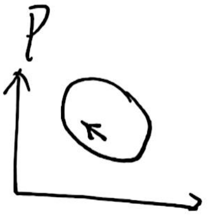
绝热过程系统对外做的功 $\boxed{W=\frac{p_1V_1-p_2V_2}{\gamma-1}}$

另一种表达 $W=nC_{V,m}(T_1-T_2)$



热力学第二定律

循环过程:



顺时针 → 正循环

$\Delta U=0$.

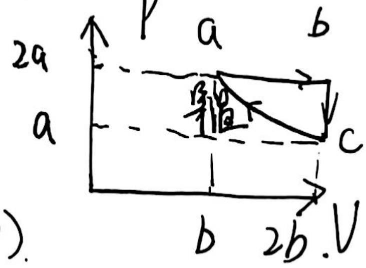
热机效率: $e=\frac{W}{Q_H}=1-\left|\frac{Q_C}{Q_H}\right|$

W ← engine做功

Q_H ← 热机吸收

Q_C ← 热机损失热量

例: 1mol O_2 作如图循环, 求效率.



$Q_{ab}=(T_b-T_a)\cdot\nu\cdot C_{p,m}=\frac{7}{2}T_a$.

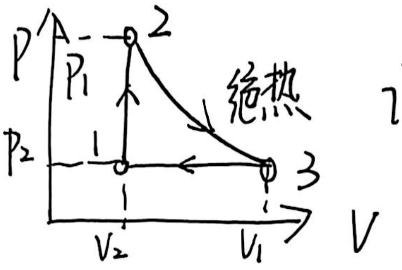
$Q_{bc}=(T_c-T_b)\cdot\nu\cdot C_{V,m}$ (=气体对外做功)

$Q_{ca}=\nu RT_a\int_{2V_0}^{V_0}\frac{1}{V}dV=RT_a\ln\frac{V_0}{2V_0}$

$e=1-\frac{Q_2}{Q_1}=1-\left|\frac{Q_{bc}+Q_{ca}}{Q_{ab}}\right|=1-\frac{C_{V,m}\cdot T_a+RT_a\ln 2}{C_{p,m}T_a}$

拒绝 ($Q_{bc}+Q_{ca}$); 吸 (Q_{ab})

$=\frac{7-5-2\ln 2}{5+2}=8.77\%$

例: 

证 $e = 1 - \gamma \dfrac{\frac{V_1}{V_2} - 1}{\frac{p_1}{p_2} - 1}$.

吸

等体: $Q_{12} = n C_{V,m} (T_2 - T_1)$ $\qquad Q_3 = 0$

$= C_{V,m} \left(\dfrac{p_1 V_1}{R} - \dfrac{p_2 V_2}{R} \right)$

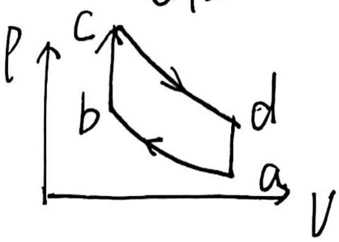
$pV = nRT$ $\qquad |Q_{23}| = 0$. $\qquad p_2 V_1 = nRT_3$

$p_1 V_2 = nRT_2$.

$Q_{31} = n C_{p,m} (T_2 - T_3)$

$|Q_{31}| = C_{p,m} \left(\dfrac{p_2 V_1}{R} - \dfrac{p_2 V_2}{R} \right)$ $= \gamma$

$e = 1 - \dfrac{|Q_{31}|}{Q_{12}} = 1 - \boxed{\dfrac{C_{p,m}}{C_{V,m}}} \dfrac{(p_2 V_1 - p_2 V_2)}{(p_1 V_2 - p_2 V_2)} = 1 - \gamma \dfrac{V_1/V_2 - 1}{p_1/p_2 - 1}$

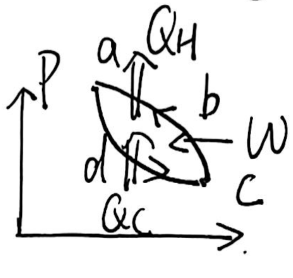
Otto循环: 

$a \to b$ 绝热压缩 $\quad b \to c$ 等容加压

$c \to d$ 绝热膨胀 $\quad d \to a$ 等容降压

$e = 1 - \dfrac{1}{r^{\gamma - 1}}$, r: compression ratio

i.e., $V \to rV$

制冷机: 

$Q_H + Q_C - W = 0$

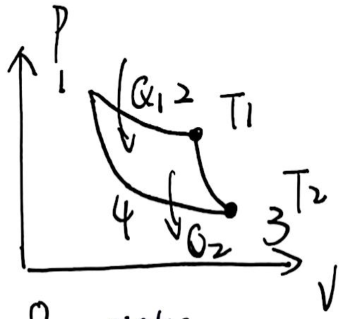
$|Q_H| = |Q_C| + |W|$.

致冷系数: $K = \dfrac{|Q_C|}{|W|} = \dfrac{|Q_C|}{|Q_H| - |Q_C|}$

卡诺循环热机: 理论上证明是效率最高的.

两个等温和两个绝热过程

$\eta = 1 - \dfrac{T_2}{T_1}$



熵变: $\Delta S = \displaystyle\int_0^{e} \frac{dQ}{T}$ $\quad$ state $\qquad dS = \dfrac{dQ}{T}$ $\quad$ 0 $\quad$ status.

Eg. 1kg 水 $0°C \to 100°C$, $c = 4190\ J/(kg \cdot K)$, $\Delta S = S_2 - S_1 = \displaystyle\int_1^{2} \frac{dQ}{T}$

$= \boxed{\displaystyle\int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{T} \cdot mc\,dT} = mc \ln \dfrac{T_2}{T_1} = 1.31 \times 10^3\ J/K$

理想气体的熵公式:

$$S(T,V) = nC_v\ln T + nR\ln V + S_0$$

or: $$S(T,p) = nC_p\ln T - nR\ln p + S_0$$