链式法则：如 $v=kx$，则 $a=\frac{dv}{dt}=k\frac{dx}{dt}=kv=k^2x$；$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$

常见积分：$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}$　$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$　$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}=\frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$　①

$$\int\frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}=-\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Skill　da db 左右分开，然后同时 integrate

重要⚠：平面极坐标系！　$\vec{v}=v_r\vec{e_r}+v_\theta\vec{e_\theta}$

$\vec{a}=\vec{a_r}+\vec{a_\theta}$，$\begin{cases}\vec{a_r}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{e_r}\\ \vec{a_\theta}=(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e_\theta}\end{cases}$

牛一：无外力，静止或匀直（相对惯性参考系）

牛二：外力下 $\vec{a}$ 与外力方向相同，$\vec{a}=F/m$，$\vec{a}=\frac{\sum_i\vec{F_i}}{m}$；

重量是质量在重力作用下的力；牛二有瞬时性、矢量性

牛三：$\vec{F}_{A\to B}=\vec{F}_{B\to A}$，方向向反

曲率半径

牛二 自然坐标系下：$\vec{e_n}$  $\vec{e_t}, v$　$\vec{a}=\frac{dv}{dt}\vec{e_t}+\frac{v^2}{\rho}\vec{e_n}$

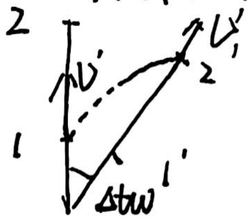
（直线，则 $\rho\to+\infty$，$a_n\to0$）

牛二导数形式：动量定理：$\vec{F}dt=md\vec{v}$，则 $\vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt}$

引入 $m\vec{v}$ 动量；牛二：外力=动量对时间变化率

科里奥利力：$\vec{f_c}^*=2m\vec{v}'\times\vec{\omega}$，描述转动参考系中

具有运动的物体受的与运动速度相关的惯性力



$\Delta t\to0$，$a_r=-\omega^2r$　这里 $\vec{\omega}\times\vec{v}$，因 $\vec{\omega}\perp\vec{v}$，则

$a_\theta=2\omega v'$　$=\omega v'$

功等于力矢量和位移矢量的点乘

动能：$\frac{1}{2}mv^2$　　功能原理：$K_2-K_1=\Delta K=W_{total}$ ②

$P_{瞬}=\frac{dW}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}$

保守力：做功与路径无关只与起始和结束位置有关的力

$$\vec{F}=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)=-\nabla U$$

质点系下　动能定理：系统的外力和内力做功的总和等于系统动能增量

系统内一对内力的功一般不为0；一对内力做功之和只与相对位移有关，与参照系无关

功能原理：所有外力的功与非保守力的功的总和等于系统机械能的增量

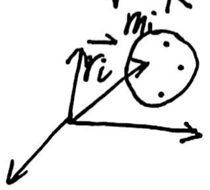
机械能守恒：如果系统只有保守力做功，非保守内力和一切外力都不做功，则动能与势能可转换，但总机械能不变

△：有非保守力做功，总机械能可能守恒

Eg：第二宇宙速动：$E_{p总}=\frac{1}{2}mv^2+\left(-\frac{GMm}{r}\right)=0+0$（脱离太阳）

则 $v_2=\sqrt{\frac{2GM}{R}}=\sqrt{2gR}=\sqrt{2}\,v_1$（第一）

质心系：



$$\vec{r_c}=\frac{\int\vec{r}\,dm}{\int dm}=\frac{1}{M}\sum m_i\vec{r_i}$$

$\vec{v_c}=\frac{1}{M}\sum m_i\vec{v_i}$，$M\vec{v_c}=\sum_i m_i\vec{v_i}$

⇒质心系的动量，如同所有质量集中于质心，速度为质心运动速度

$\sum_i \vec{F_i} = m\vec{a_c}$ ⇒ 质心运动定理：质心的运动等同于一个质点的运动，这个质点具有质点系总质量，它受到的外力为质系所受所有外力矢量和。 ③

柯尼希定理：$E_k = \frac{1}{2}Mv_c^2 + E_k'$

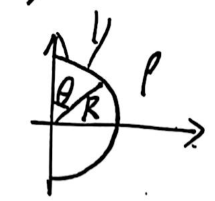
⇒ 质点系总动能等于质心动能，加上各质点相对于质心平动坐标系所具有的动能

Proof: $E_k = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\vec{v_c}+\vec{v_i})^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_c^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\overbrace{\sum_i m_i\vec{v_i}}^{=0}\,\vec{v_c} + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2$

$= \frac{1}{2}Mv_c^2 + E_k'$

求质心：$x_c = \frac{\int x\,dm}{\int dm}$ $y_c = \frac{\int y\,dm}{\int dm}$ $z_c = \frac{\int z\,dm}{\int dm}$

Eg:



$dm = \rho_l\,dl = \rho_l R\,d\theta$

$x_c = \int x\,dm/m = \int x\cancel{\rho_l R}\,d\theta/\pi\cancel{R\rho_l}$

$= \frac{1}{\pi}\int x\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} R\sin\theta\,d\theta = \frac{2R}{\pi}$

质点系：内力：质点系内各个质点间相互作用

外力：系外物体对系统内质点施加的力

内力成对出现，对整体运动无影响

质心：位置平均意义上代表质量分布的中心

质心：$\vec{v_c} = \frac{\sum m_i\vec{v_i}}{\sum m_i}$，$\vec{a_c} = \frac{\sum m_i\vec{a_i}}{\sum m_i}$，$\sum_i \vec{F_i} = m\vec{a_c}$

质点动量定理: $\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$

质点系: $(\sum_i \vec{F}_i)dt = d(\sum_i \vec{p}_i)$.

$$\sum\int_{t_1}^{t_2} F_i dt = \sum_i m_i v_{i2} - \sum_i m_i v_{i1}$$

如果系统所受外力之和为0，则系统总动量保持不变

碰撞: 例: 火箭速度: t时刻, M, v, dt内喷dm.

喷气相对火箭为u, 使火箭速度加dv

$$Mv = (M-dm)(v+dv) + dm(v+dv-u) \quad (u向前).$$

$$= \cancel{Mv} + Mdv - \cancel{vdm} - \cancel{dmdv} + \cancel{vdm} + \cancel{dmdv} - udm$$

$$Mdv = udm$$

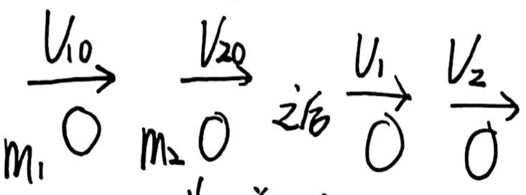
△若u向后 $dv = -u\frac{dM}{M}$, $\Delta v = u\ln\frac{M_1}{M_2}$ 质量比 $= \frac{M_{满油}}{M_{无油}}$

同时: $f_{gas}dt = (-dM)(v+dv-u) - (-dM)v$

$$f_{gas} = u\frac{dM}{dt} \quad (略去二阶)$$

碰撞中动量守恒, 但能量守恒不一定

恢复系数: $e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}$



$e=1$: 完全弹碰 $e\in(0,1)$, 非弹碰

$e=0$: $v_2=v_1$, 完全非弹碰

$$e=1: \begin{cases} v_1 = \frac{(m_1-m_2)v_{10}+2m_2v_{20}}{m_1+m_2} \\ v_2 = \frac{(m_2-m_1)v_{20}+2m_1v_{10}}{m_1+m_2} \end{cases}$$

完全非弹碰: $e=0$. $v_1=v_2=\frac{v_1m_1+v_2m_2}{m_1+m_2}$

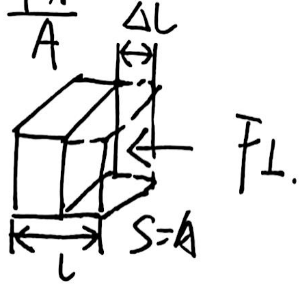
非弹碰: $\begin{cases} v_1=v_{10}-\frac{(1+e)m_2(v_{10}-v_{20})}{m_1+m_2} \\ v_2=v_{20}+\frac{(1+e)m_1(v_{10}-v_{20})}{m_1+m_2} \end{cases}$

$|\Delta E|=\frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_{10}-v_{20})^2$

弹性: 应变: 受力后的形变 $\varepsilon_x=\frac{\Delta x}{x}$

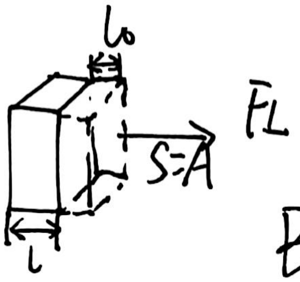
应力: 单位面积受力大小 $\sigma_x=\frac{F_x}{A}$

压应? stress $=\frac{F_\perp}{A}$ strain $=\frac{\Delta L}{L_0}$

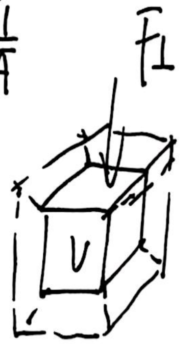


Young's Modulus: $Y=\frac{F_\perp/A}{\Delta L/L_0}$

拉应?



体应? $\left|\begin{array}{ll} \text{力} & p=\frac{F_\perp}{A} \\ \text{变} & \frac{\Delta V}{V_0} \end{array}\right.$



体弹性Modulus

$B=-\frac{\Delta p}{\Delta V/V_0}$ $(\Delta V<0)$

切应? $\left|\begin{array}{ll} \text{力}: & \frac{F_\parallel}{A} \\ \text{变}: & \frac{x}{h} \end{array}\right.$

虚: 原: V_0:

切向Modulus:

$S=\frac{F_\parallel/A}{x/h}$

刚体：平动+转动

角速度：$\omega=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ 角加：$\vec{\alpha}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}$

↳方向：右螺 ↳ $\vec{\alpha}$与$\vec{\omega}$同/反方向

$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ （线速度）.

☆ 转动惯量：每一个质点：$v_i=r_i\omega$，$\frac{1}{2}m_iv_i^2=\frac{1}{2}m_ir_i^2\omega^2$

总动能：$\sum_i\frac{1}{2}m_ir_i^2\omega^2=\frac{1}{2}(\sum_i m_ir_i^2)\omega^2$

故定义转动惯量：$I=\sum_i m_ir_i^2$
(rotational Inertia)

则：$K=\frac{1}{2}I\omega^2$，有 $I\uparrow\omega\downarrow$；$I\downarrow\omega\uparrow$（Eg：人坐椅，伸出哑铃）

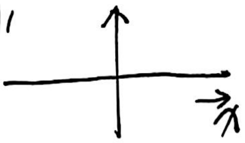
$I=\int r^2dm=\int r^2\rho dV=\rho\int r^2dV$

☆ 平行轴定理：M刚体绕质心cm有I_{cm}；则绕P点：

$I_P=I_{cm}+Md^2$，其中两轴平行，相距为d

垂直轴定理：$I_z=I_x+I_y$，x y 正交，$z\perp xOy$，薄片必须位于xOy

Eg1

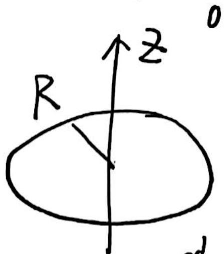


$I_1=\int r^2dm$，$dm=\frac{dx}{l}\cdot m$，$I=\int_{-l/2}^{l/2}x^2\frac{m}{l}dx=\frac{1}{12}ml^2$

$I_2=\int r^2dm=\int_0^{l}x^2\frac{m}{l}dx=\frac{1}{3}ml^2$

or: $I_2=I_1+m\cdot\frac{1}{4}l^2=1/3ml^2$

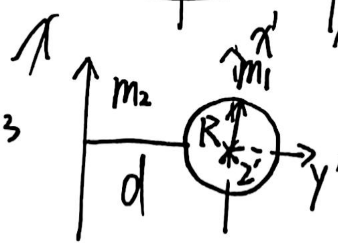
Eg2.



$I=\int R^2dm$，$dm=\lambda dl$，其中：$\lambda=\frac{m}{2\pi R}$

则 $\int R^2\lambda\, dl=\int_0^{2\pi R}R^2\frac{m}{2\pi R}dl=mR^2$

Eg3

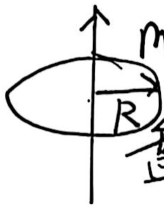


m_2对x：$I_2=\frac{1}{3}ml^2$ $I_{x'}=I_{y'}=\frac{1}{2}I_{z'}=\frac{1}{2}mR^2$

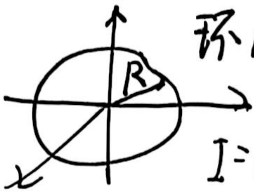
平行轴：$I_1=\frac{1}{2}mR^2+m_1(R+d)^2$

$\therefore I=I_1+I_2$

常用Inertia:



盘 $I=\frac{1}{2}mR^2$



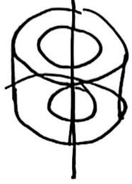
环 m $I=mR^2$

⑦

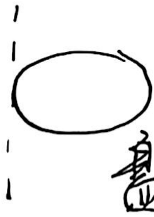
$I=\frac{1}{3}ml^2$

球壳: $\frac{2}{3}mR^2$

球体: $I=\frac{2}{5}mR^2$

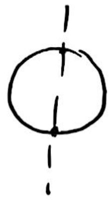


$\frac{1}{2}m(R_1^2+R_2^2)$



$\frac{3}{2}mR^2$

盘



盘 $\frac{1}{4}mR^2$ ($\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2$,垂)

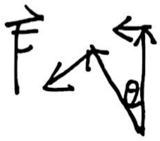
力矩: $\tau=FL=rF\sin\phi$ 逆时针为正值

$=\vec{r}\times\vec{F}$

转动定律: 刚体定轴转动时,刚体角加速度与它所受到的合外力矩成正比,与转动惯量成反比

$$\sum\tau_z=I\cdot\alpha_z$$

力矩的功 等于力矩对角位置的积分:



$$W=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\tau_z d\theta$$

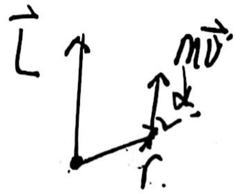
刚体转动动能定理: $\tau_z d\theta=(I\alpha_z)d\theta=I\frac{d\omega_z}{dt}d\theta$

$=I\omega_z d\omega_z$

$$\therefore W_{tot}=\int_{\omega_1}^{\omega_2}I\omega_z d\omega_z=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\tau d\theta=\frac{1}{2}I\omega_2^2-\frac{1}{2}I\omega_1^2$$

角动量: $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$

$= mvr\sin\alpha$，右手定方向



角动量定理: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ 质点所受合外力矩等于它对 ⑧

同一参考点的角动量的时间变化率

角动量守恒: 外力合力矩为0，则角动量矢量不变

质点系角动量定理: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

$\vec{\tau} = \sum \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{r}_i\times\vec{F}_i$ ，$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i$

刚体的角动量: $L_i = m_i(r_i\omega)r_i = m_i r_i^2\omega$

$L = \sum L_i = I\omega$，$I = \sum_i m_i r_i^2$

若体系合外力矩为0，则总角动量不变

平衡: $\sum\vec{F} = 0$ $\sum\vec{\tau} = 0$

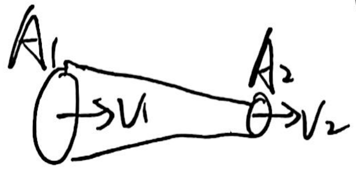
g在质心系不变时，二者重合

流体力学: 流体中某一点处压强等于? $p = \frac{dF_\perp}{dA}$

※ 压力总垂直于流体任一个面，且某点处p任意方向相同

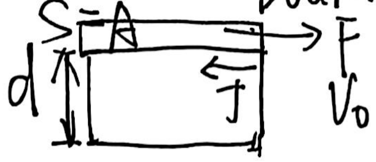
$p = p_0 + \rho g h$ pascal: 压强处处相同

$F_浮 = \rho_液 g V_排$



$A_1v_1 = A_2v_2$

Bournaulli: $p + \rho g y + \frac{1}{2}\rho v^2 = constant$



$\frac{f}{A} = \eta\frac{v_0}{d}$

⑨ 理解 J（转惯）角动量 M（力矩）可用以下类比：

$\vec{F} = m\vec{a}$　　　　$M = J\beta$．　$\beta = \frac{d\omega}{dt}$．

$\vec{p} = m\vec{v}$　　动量 $\Rightarrow$ 角-- $L = J\omega$

$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$ 合力　合力矩 $M = \frac{d(J\omega)}{dt}$．

可见　$m \Rightarrow J$
$\vec{a} \Rightarrow \beta$
$\vec{v} \Rightarrow \omega$

则角动能 $\frac{1}{2}J\omega^2$

物体在体系中不"转"却也可能有

转动惯量