第九章 拉普拉斯变换

一个 e^{st} 复指数信号经过 $h(t)$ 的 LTI:

$$e^{st} \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

定义: $\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = H(s) \rightarrow y(t) = H(s) e^{st}$

一个信号 $x(t)$ 拉普拉斯变换定义如下:

$$X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (1)$$

这个式子中 s 为自变量，而 s 是 e^{-st} 中指数复变量。因此，s 有实虚部: $s = \sigma + j\omega$ (2)

可以注意到，$x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ 时，若 S 纯虚，$s = j\omega$:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$i.e., \quad X(s)|_{s=j\omega} = \mathcal{F}\{x(t)\} \quad (3)$$

而对于 $X(\sigma + j\omega)$:

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt \quad (4)$$

因此: $\mathcal{L}\{x(t)\} \triangleq \mathcal{F}\{x(t) e^{-\sigma t}\}$ (5)

Eg: $x(t) = e^{-at} u(t)$, $X(s) = ?$

我们已知: $X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$, $a > 0$

而 LT: $X(s) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+a)t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{(\sigma + a) + j\omega} \qquad Re\{s\} > -a$$

故: $X(s) = \frac{1}{s+a}$ $\qquad Re\{s\} < -a$

$x(t) = -e^{-at} u(-t)$ 呢? $X(s)$ 依然为 $\frac{1}{s+a}$，但

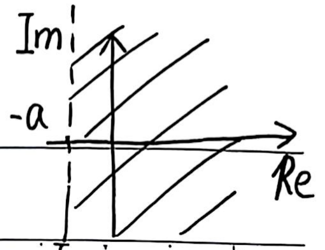
X(s) 相同，但 S 域却可大不相同；故给出LT时，代数表达式与该式成立的变量 S 值范围都应给出

No.

Date

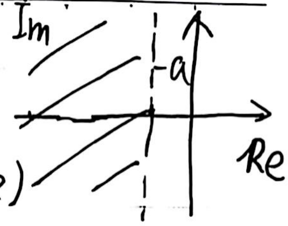
*: N(s)零点称为：零点

D(s)零点称为：极点



如：$e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+a}$，S范围：$Re\{s\} > -a$

$-e^{-at}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+a}$，S范围：$Re\{s\} < -a$



一般S的范围为收敛域(ROC, region of convergence)

Eg. $x(t) = 3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)$.

$\mathcal{L}\{3e^{-2t}u(t)\} = \frac{3}{2+s}$，$Re\{s\} > -2$

$\mathcal{L}\{-2e^{-t}u(t)\} = -\frac{2}{1+s}$，$Re\{s\} > -1$

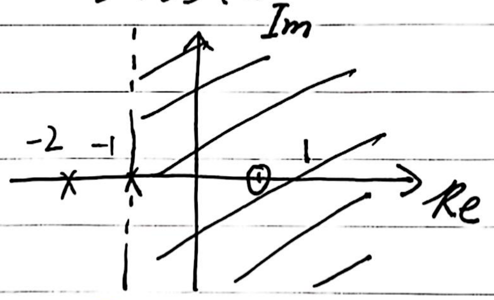
$\therefore X(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+2}$，$Re\{s\} > -1$

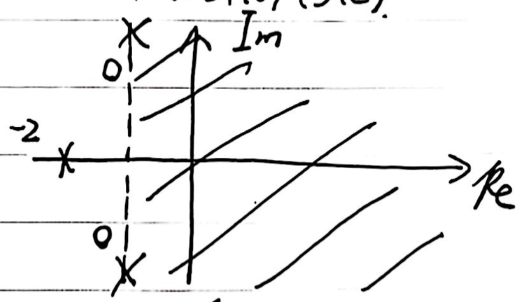
在上述3个例子中，X(s)均是有理的，i.e.，$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$

故在S中在ROC图里标上N(s)、D(s)的根是一种形象表示：

这称为 零-极点图 (pole-zero plot)*

Eg：$\frac{s-1}{s^2+3s+2}$，$Re\{s\} > -1$ $\qquad$ $\frac{2s^2+5s+12}{(s^2+2s+10)(s+2)}$，$Re\{s\} > -1$





N(s)根用 x；D(s)根用 o；D(s)二重根可用 ◎

ROC性质很重要，两个X(s)均为$\frac{1}{s+a}$的x(t)却不同，说明LT只有靠ROC才能区分

Property 1：ROC在S平面内是由平行于jω轴的带状区域组成的

Proof：$\because x(t) \cdot e^{-\sigma t}$的FT收敛，则：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$$

该条件只与σ有关

Campus

No.
Date

Property 2：对于有理LT，ROC不包括极点、（分母不为0）.

Property 3：若$x(t)$是有限持续期的，且绝对可积，则 ROC为整个S平面

Proof: It is required: $\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$

If $\sigma > 0$ $\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt \le e^{-\sigma T_1} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| dt$

If $\sigma < 0$ $\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt \le e^{-\sigma T_2} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| dt$

Eg $x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & 0 < t < T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

$X(s) = \int_0^T e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{s+a}\left[1 - e^{-(s+a)T}\right]$

$\lim_{s \to -a} X(s) = \lim_{s \to -a} T e^{-aT} e^{-sT} \Rightarrow X(-a) = T$, ROC为S平面

Property 4：如果$x(t)$为右边信号*，且$Re[s] = \sigma_0$这条线在ROC内，则$Re[s] > \sigma_0$的全部s值必在ROC内。

*：若在某有限时间T_1之前，$x(t) = 0$，则称为右边(right-side)信号

Proof: It is required: $\int_{T_1}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$

For $\sigma_1 > \sigma_0$, $\int_{T_1}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt = \int_{T_1}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t} dt$

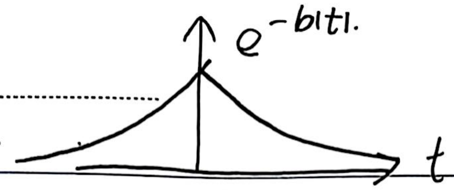
$\le e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T_1} \int_{T_1}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt$

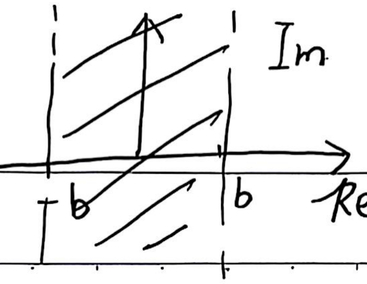
Similarly: Property 5：若$x(t)$为左边信号，且$Re[s] = \sigma_0$位于ROC内，则$Re[s] < \sigma_0$的全部s也必在ROC内

Property 6：若$x(t)$为双边信号，且$Re[s] = \sigma_0$在ROC内，则ROC一定由S平面的一条带状区域组成

No.

Date





Eg: $x(t) = e^{-b|t|}$, $X(s) = ?$ $(b>0)$.

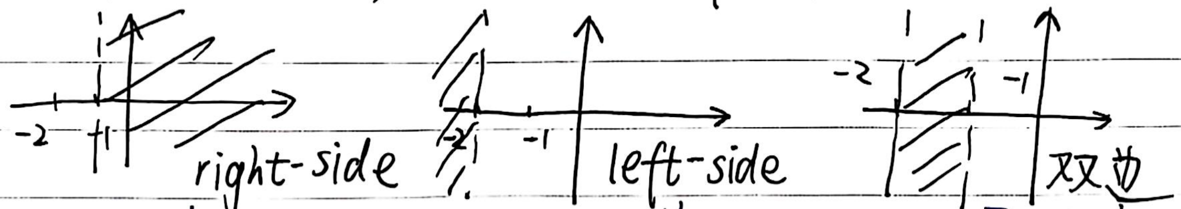
$x(t) = e^{-bt}u(t) + e^{bt}u(-t)$.

则 $\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{1}{s+b} - \frac{1}{s-b} = -\frac{2b}{s^2-b^2}$, $-b<Re\{s\}<b$

Property 7: 若 $X(s)$ 有理，则 S 是被极点所界定的或延伸到无限远，且 ROC 中不包含 $X(s)$ 任何极点

Property 8: 若 $X(s)$ 有理，则若 $x(t)$ 为 right-side，则 ROC 在 S 平面上位于最右边极点的右边；若 $x(t)$ 为左边信号则其收敛域在 S 平面上位于最左边极点的左边

Eg: $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ 可能对应三种 $x(t)$，whose ROC is:



FT收　　FT不收　　FT不收

⚠ $s=j\omega$ 时，$F\{X\} = X(j\omega)$；若 ROC 不含 $j\omega$ 轴，i.e., $Re\{s\}=0$，则 FT 不收敛

Proof: $X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$，令 $s=j\omega$

$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$，这一部分在 $X(s)$ 图上为纯虚部分，i.e., $X(s)$ 中 $Re\{s\}=0$ 线上.

FT 中有 $F\{x(t)\}$，也有 $F^{-1}\{X(j\omega)\}$；LT 中也有 inverse LT:

$$X(\sigma+j\omega) = F\{x(t)e^{-\sigma t}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt$$

有: $x(t)e^{-\sigma t} = F^{-1}\{X(\sigma+j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma+j\omega)e^{j\omega t}dt$

则 $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma+j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t}d\omega$

No.

Date

可见：$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}ds$ $\left(\begin{cases}s=\sigma+j\omega\\ ds=jd\omega\end{cases}\right)$

Eg：$X(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$，$Re\{s\}>-1$

则 $X(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$，$e^{-t}u(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s+1}$，$Re\{s\}>-1$

$e^{-2t}u(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s+2}$，$Re\{s\}>-2$

$\therefore x(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$

若 $Re\{s\}<-2$ 呢？ $-e^{-t}u(-t)\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s+1}$，$Re\{s\}<-1$

$-e^{-2t}u(-t)\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s+2}$，$Re\{s\}<-2$

对于有理变换，逆LT不必计算复平面围线积分，采用部分分式展开的方式。假设无重阶极点，且设分母多项式阶次高于分子，则：

$$X(s)=\sum_{i=1}^{m}\frac{A_i}{s+a_i}$$

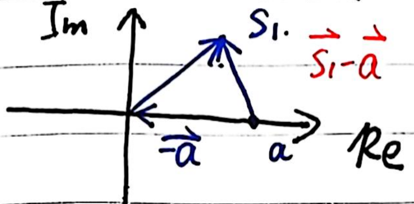
每一项两种可能：$\begin{cases}\text{ROC位于 } s=-a_i\text{右边}：A_ie^{-a_it}u(t)\\ \text{ROC位于 } s=-a_i\text{左边}：-A_ie^{-a_it}u(-t)\end{cases}$

由零-极点图对FT进行几何求值

如何用LT的 pole-zero plot 来求FT？

考虑只有单个零点的LT，e.g.，$X(s)=s-a$.

在 $s=s_1$ 处求值，$X(s_1)=s_1-a$，可视为 $\vec{s_1}+(\vec{-a})$



则：$|X(s_1)|=|\vec{s_1}-\vec{a}|$.

$\measuredangle X(s_1)=\measuredangle\ \vec{s_1}-\vec{a}$

而 $X(s)=\frac{1}{s-a}$ 呢 $|X(s_1)|=\frac{1}{|\vec{s_1}-\vec{a}|}$.

$\measuredangle X(s_1)=-\measuredangle\ \vec{s_1}-\vec{a}$

KOKUYO

而有理LT是由上述讨论的pole & zero构成的：

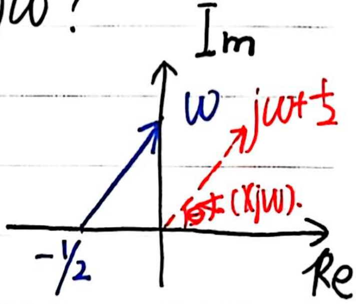
$$X(s) = M\frac{\prod_{i=1}^{R}(s-\beta_i)}{\prod_{j=1}^{P}(s-\alpha_j)}$$

$$|X(s_1)| = |M|\cdot\frac{\prod_{i=1}^{R}|s_1-\beta_i|}{\prod_{j=1}^{P}|s_1-\alpha_j|} \qquad \measuredangle X(s_1) = \measuredangle M + \sum_{i=1}^{R}\measuredangle\overrightarrow{s_1-\beta_i} - \sum_{i=1}^{P}\measuredangle\overrightarrow{s_1-\alpha_j}$$

Eg. $X(s) = \frac{1}{s+1/2}$，$Re\{s\} > -\frac{1}{2}$，$s=j\omega$?

$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1/2}$，$|X(j\omega)|^2 = (\frac{1}{4}+\omega^2)^{-1}$

$\measuredangle X(j\omega) = -\tan^{-1}2\omega$

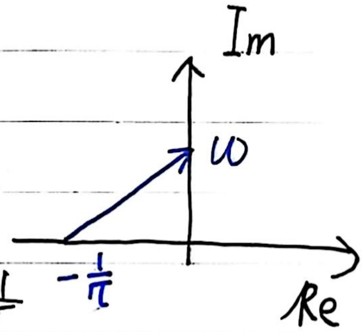


借上述分析，进一步探讨一些系统：

一阶：* 这一类的h(t)为：$h(t)\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}u(t)$.

*：$\tau\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$，$H(j\omega)=\frac{1}{j\omega\tau+1}$

则LT为：$H(s)=\frac{1}{s\tau+1}$，$Re\{s\} > -\frac{1}{\tau}$



$s=j\omega$下：$|H(j\omega)|^2 = (\tau^{2*}\omega^2+(1/\tau)^2)^{-1}$

*：这个τ是因为 $H(s)=\frac{1}{\tau}\cdot\frac{1}{s+1/\tau}$，前面有系数τ

$\measuredangle H(j\omega) = -\tan^{-1}(\tau\omega)$

二阶：$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\zeta\omega_n\frac{dy(t)}{dt}+\omega_n^2y(t)=\omega_n^2x(t)$.

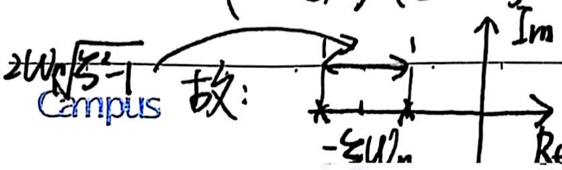
$h(t)=M[e^{c_1t}-e^{c_2t}]u(t)$，其中 $\begin{cases}C_1=-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\\C_2=-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\\M=\frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\end{cases}$

$\therefore H(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_ns+\omega_n^2}$

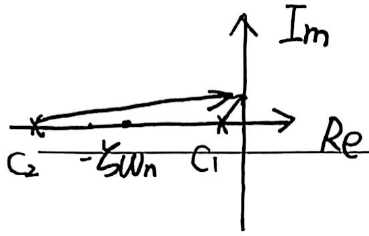
$=\frac{\omega_n^2}{(s-C_1)(s-C_2)}$

$\zeta>1$；$\zeta>>1$时.

故：



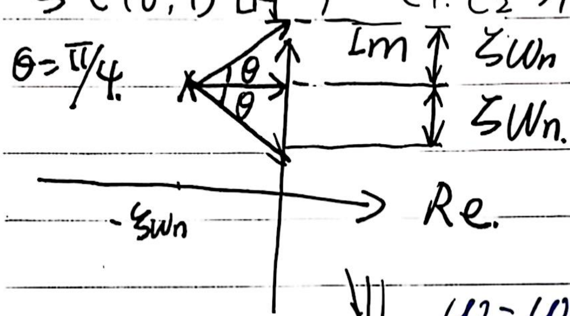
一个极点左移；另一个紧靠jω轴(Im).

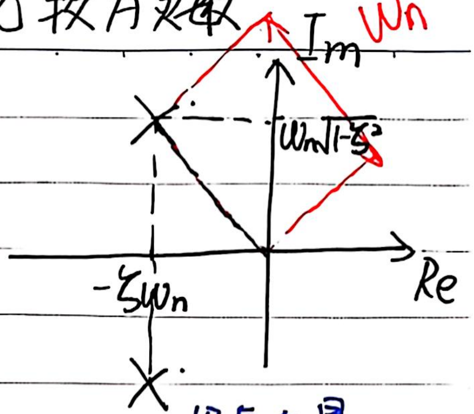


当 $\zeta >> 1$ 时，对于 $j\omega = s$，相位信息由一个 $\overrightarrow{j\omega - c_1}$ 主导

且 $|\overrightarrow{j\omega - c_1}|$ 随 ω 变化较为灵敏

$\zeta \in (0,1)$ 时，$c_1 . c_2$ 不再纯实:

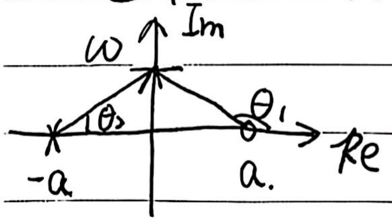




极点向量

$\Downarrow$ $\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ 与 $\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \pm \zeta\omega_n$

全通系统：考虑系统 $h(t)$ 有如下LT:



$j\omega$ 上任何一点，极点和零点向量长度一样

因此频率响应模是常数

$$\measuredangle H(j\omega) = \pi - 2\theta_2 = \pi - 2\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

接下来，如FT那样，LT也有许多性质

① 线性 $x_1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s)$ $\quad x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X_2(s)$

则 $a x_1(t) + b x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} a X_1(s) + b X_2(s)$，ROC包含 $R_1 \cap R_2$

Eg. $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$，$X_1(s) = \frac{1}{s+1}$，$Re\{s\} > -1$

$X_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$，$Re\{s\} > -1$

则 $X(s) = \frac{1}{s+2}$，$Re\{s\} > -2$，$Re\{s\} > -2$ 包含了 $Re\{s\} > -1$.

② 时移 $x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$. $\quad ROC = R$

则 $x(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0} X(s)$. $\quad ROC = R$

频移: $e^{s_0 t} x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s - s_0)$ $\quad ROC = R + Re\{s_0\}$.

③ 时域尺度变换 $x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$. $\quad ROC = R$

$x(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$，ROC $R_1 = |a|R$

$x(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(-s)$，$ROC = -R$

④ 共轭：$x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$　ROC=R

$x^*(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X^*(s^*)$，ROC=R

若 $x(t)$ 为实信号，则 $X(s)=X^*(s^*)$.

⑤ 卷积：$x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s)$.　$ROC=R_1$

$x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X_2(s)$　$ROC=R_2$

$x_1(t) * x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s)\,X_2(s)$，ROC包含 $R_1 \cap R_2$

⑥ 时域微分：$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sX(s)$，ROC包含R

Proof: $x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds$

$$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}[s\,X(s)]e^{st}dt.$$

⑦ 频域微分：$-tx(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{dX(s)}{ds}$

Proof: $X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$

$$\frac{dX(s)}{ds}=\int_{-\infty}^{+\infty}[(-t)\,x(t)]\,e^{-st}dt$$

⑧ 时域积分：$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}X(s)$

proof: $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = u(t) * x(t)$　　$u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}$, $Re\{s\}>0$

$\frac{1}{s} * x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}X(s)$.

or: $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}\left[\frac{1}{s}X(s)\right]e^{st}ds.$

⑨. 初值 & 终值定理

初：$x(0^+)=\lim_{s\to\infty} sX(s).$

终：$\lim_{t\to\infty} x(t)=\lim_{s\to 0} sX(s).$

同FT一样，LT也有自己常见的LT对，见最后；

用LT分析与表征时不变系统：

核心：$Y(s) = H(s)X(s)$ ；若$s=j\omega$，则 $Y(j\omega)=H(j\omega)X(j\omega)$

正是FT中介绍的FT LTI 卷积 $\longleftrightarrow$ 乘积性质

有：$e^{st} \longrightarrow LTI \longrightarrow y(t)=H(s)e^{st}$

$x(t) \longrightarrow LTI \longrightarrow y(t)=x(t)*h(t)$，$Y(s)=H(s)X(s)$

① 因果性：一个因果系统的 $H(s)$ ROC为某右半平面

（*：反之不亦然！）

而若$H(s)$ $\boxed{\text{有理}}$，则只须看收敛域是否为右半平面，即可判定是否因果，i.e.,

对于一个有理 $H(s)$ 系统，Causality $\Leftrightarrow$ ROC是否为最右极点的右半平面

Eg. $h(t)=e^{-t}u(t)$，在 $t<0$时，$h(t)=0$ 可知因果

$H(s)=\frac{1}{s+1}$，$Re\{s\}>-1 \Rightarrow$ Causal

$h(t)=e^{-|t|}$，在 $t<0$时，$h(t)\neq 0$，不因果

$H(s)=\frac{-2}{s^2-1}$，$-1<Re\{s\}<1 \Rightarrow$ Noncausal

强调：$H(s)$ 有理才可应用结论！见下例：

$H(s)=\frac{e^s}{s+1}$，$Re\{s\}>-1$，则考虑时移性质：

time-shift：$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$, ROC$=R$.

$\Rightarrow x(t-t_0) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} e^{-st_0}X(s)$, ROC$=R$.

可见 $t_0=-1$下，$e^{-t}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+1}$，$Re\{s\}>-1$.

$h(t)=e^{-(t+1)}u(t+1) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{e^s}{s+1}$，$Re\{s\}>-1$

$\therefore h(0)\neq 0$ $t\in(-1,0)$，$h(t)\neq 0$，Noncausal

② 稳定性：

iff $H(s)$ ROC包括$j\omega$轴时，LTI稳定

Why? $H(s)$ LTI stable $\longrightarrow$ $H(s)$ 绝对可积

ROC含$j\omega$轴

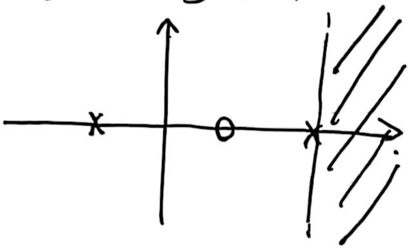
No.

Date

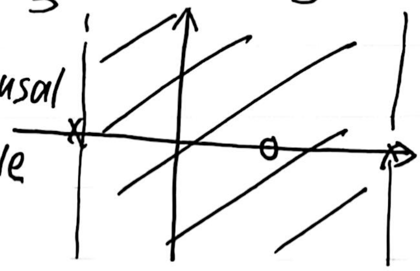
Eg. $H(s) = \dfrac{s-1}{(s+1)(s-2)}$ Causal? Stable?

注意没给出 ROC！要分类讨论！

$h(t) = \left(\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}\right)u(t)$ $\qquad$ $h(t) = \frac{2}{3}e^{-t}u(t) - \frac{1}{3}e^{2t}u(-t)$

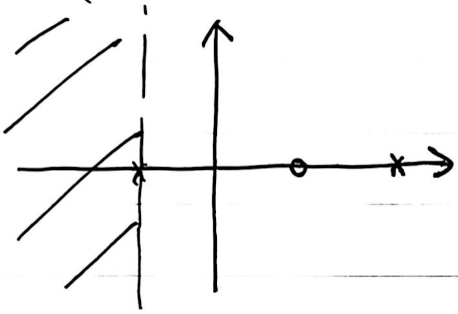


Causal
Unstable



Noncausal
Stable

$h(t) = -\left(\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}\right)u(-t)$



Unstable
Noncausal

③ 线性常系数微分方程表征的LTI

Eg. $\dfrac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$，$H(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)}$

应用LT微分性质：$y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s)$，$\dfrac{dy(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} sY(s)$

则代入：$sY(s)+3Y(s) = X(s)$，$H(s) = \dfrac{1}{s+3}$

会发现无收敛域！但事实上，微分方程本身不能完全表征LTI！

但知道额外信息，如系统 causal or anti-causal，也许也可以帮助决定ROC；Eg：若知LTI stable，ROC $Re\{s\} > -3$

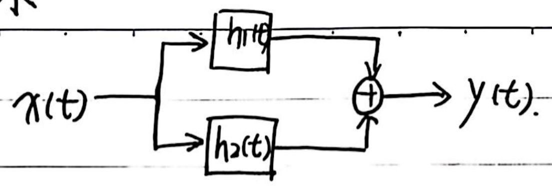
有：$\displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$，$H(s) = \dfrac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$

No.
Date

系统函数代数属性与方框图表示

Parallel: $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$

$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$



Series: $h(t) = h_1(t) * h_2(t)$

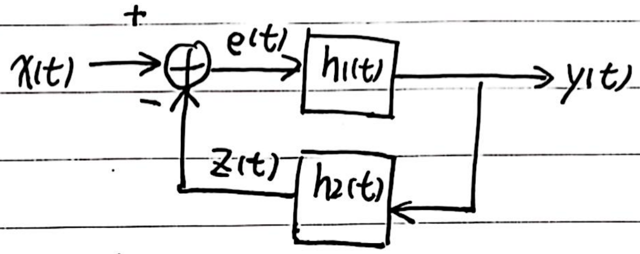
$H(s) = H_1(s)H_2(s)$

Feedback: $Y(s) = H_1(s)E(s)$

$E(s) = X(s) - Z(s)$

$Z(s) = H_2(s)Y(s)$

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1+H_1(s)H_2(s)} \quad *$$

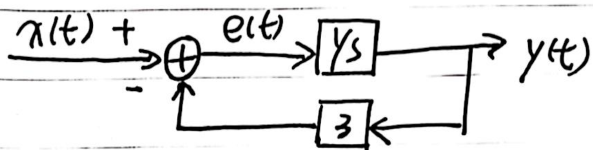


$$* \quad H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)\,(X(s)-H_2(s)Y(s))}{X(s)} = H_1(s) - H_1(s)H_2(s)H(s).$$

$$\therefore H(s) = \frac{H_1(s)}{1+H_1(s)H_2(s)}$$

Integration: $x(t) \to \boxed{1/s} \to y(t)$

Eg:

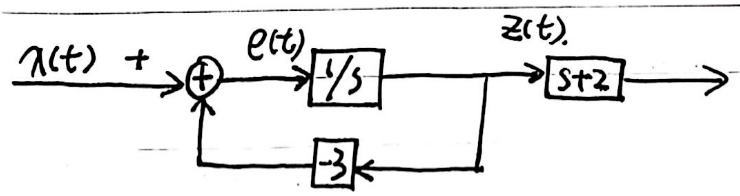


, 则 $H(s) = \frac{1/s}{1+3/s} = \frac{1}{s+3}$

$$\Leftrightarrow \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$$

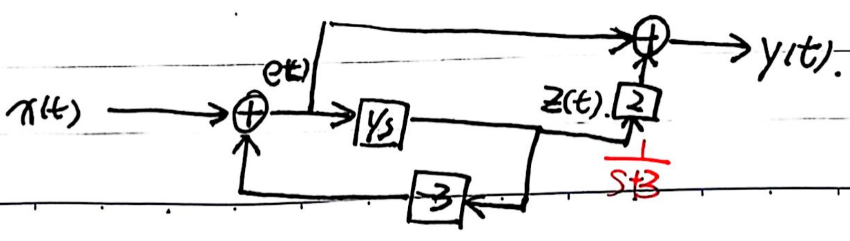
Eg. $H(s) = \frac{s+2}{s+3} = (s+2)\cdot\left(\frac{1}{s+3}\right) = (s+2)\cdot\frac{1/s}{1+3/s} = \boxed{S}\cdot\frac{1/s}{1+3/s} + 2\cdot\frac{1/s}{1+3/s}$

导.



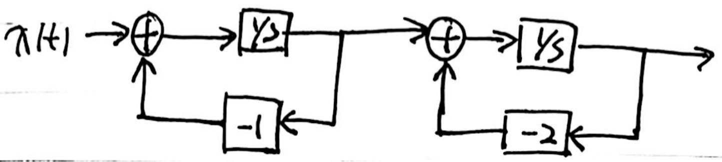
$$y(t) = 2z(t) + \frac{dz(t)}{dt}$$
$$= 2z(t) + e(t).$$

同时，$H(s) =$

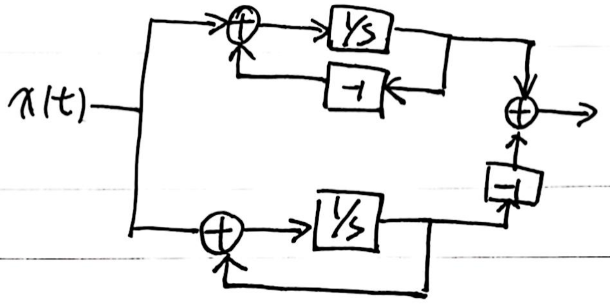


因果二阶例: $H(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}$, $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$

$H(s)=\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s+2}$ ① $=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$; ②

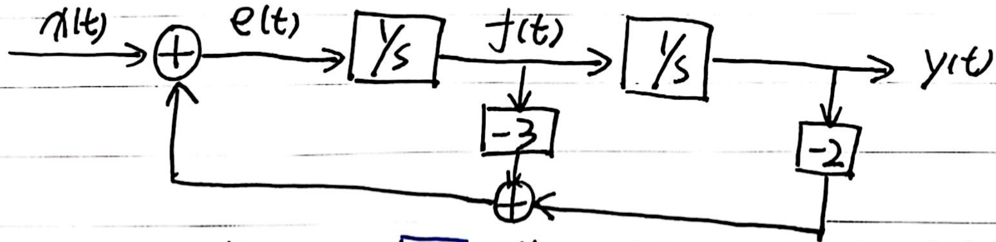


① 级联型



② 并联型

同时, 令 $f(t)=\frac{dy(t)}{dt}$ $e(t)=\frac{df(t)}{dt}$, 则 $e(t)=-3f(t)-2y(t)+x(t)$



直接型

Skill: 进入 → $\boxed{1/s}$ 的 从左到右, 设有n个block, 则分别代表 $\frac{d^ny(t)}{dt^n}$, 如 $e(t)=\frac{d^2y(t)}{dt}$, $f(t)=\frac{dy(t)}{dt}$

单边拉普拉斯变换:

$x(t)\xrightarrow{UL}X(s)=UL[x(t)]$ $X(s)=\int_{0^-}^{\infty}x(t)e^{-st}dt$

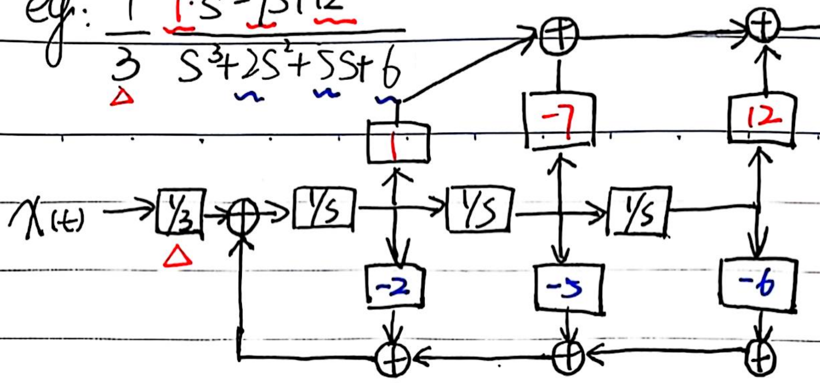
($X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt$).

*: 在t<0时不同而在t≥0时相同的两个信号, 将有不同的双边LT, 相同的单边LT ; i.e., X(s) 就是x(t) 将t<0部分置0后的 X(s) LT结果

单边LT 同双边LT一样也有许多性质。

附：直接型例子.

eg: $\frac{1}{3}\cdot\frac{1\cdot s^2-7s+12}{s^3+2s^2+5s+6}$



⚠ 注意分母最高次数项系数应为1（分子不然，可不为1）

⚠ UL的收敛域一定位于某个右半平面 （$t<0^-$ 管不了）

Eg. $X=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$，则 $x(t)=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)$ for $t>0^-$

$(Re\{s\}>-1)$

Eg. $X(s)=\frac{s^2-3}{s+2}=-2+s+\frac{1}{s+2}$，$Re\{s\}>-2$

$x(t)=-2\delta(t)+u_1(t)+e^{-2t}u(t)$ for $t>0^-$

where: $u_n(t)=\frac{d^n\delta(t)}{dt^n}$

Properties: 线性 ；s域平移：$e^{s_0t}x(t)\xrightarrow{UL}X(s-s_0)$

时域尺度变换：$x(at)$，$a>0\xrightarrow{UL}\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$

共轭 $x^*(t)\xrightarrow{UL}X^*(s)$ ；卷积

t微分：$\frac{dx(t)}{dt}\xrightarrow{UL}sX(s)-x(0^-)$ *

s微分：$-tx(t)\xrightarrow{UL}\frac{dX(s)}{ds}$

时域积分：$\int_{0^-}^{t}x(\tau)d\tau\xrightarrow{UL}\frac{1}{s}X(s)$

初&终值定理：

$x(0^+)=\lim_{s\to\infty}sX(s)$ $\qquad \lim_{t\to\infty}=\lim_{s\to 0}sX(s)$

* proof: $\int_{0^-}^{\infty}\frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt=x(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty}+s\int_{0^-}^{\infty}x(t)e^{-st}dt$

$=sX(s)-x(0^-)$

Similarly: $\frac{d^2x(t)}{dt^2}\xrightarrow{UL}s^2X(s)-sx(0^-)-x'(0^-)$

利用单边 Laplace 求解微分方程

why $\mathcal{UL}$? Non-zero initial condition:

Eg $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$. $y(0^-) = \beta$ $y'(0^-) = \gamma$

if $x(t) = \alpha u(t)$. $y(t) = ?$

左右两式均 UL

⇑

Solution: $s^2 Y(s) - \beta s - \gamma + 3sY(s) - 3\beta + 2Y(s) = X(t) = \frac{\alpha}{s}$

$y(t) = \mathcal{UL}^{-1}\{Y(s)\}$, $Y(s) = \boxed{\frac{\beta(s+3)}{(s+1)(s+2)} + \frac{\gamma}{(s+1)(s+2)}} + \boxed{\frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)}}$

① ②

$\Rightarrow y(t) = [1 - e^{-t} + 3e^{-2t}]u(t)$, $t>0$

①：若 $x(t)=0$ 为输入，得到的零输入响应

②：若 $y(t)$ 在 0^-，$y(t)$ 在 0^- 无输出，输入 $x(t)=\alpha u(t)$ 后得到的零状态响应