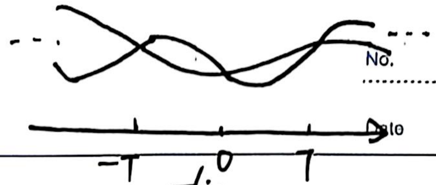


fig1

第七章 采样

一. 用信号样本表示连续时间信号

Sampling, 采样, 将连续时间转为离散时间信号。但无附加条件或说明下, 不应指望信号能由一组样本点来表征。如 fig1, 在 T 整数倍点时值相同。i.e., 有无限多信号可产生一组给定的样本值。

但有采样定理: 若信号带限 (即FT在某一有限带范围外均为0) 且样本足够密 (相对于信号最高频率), 则样本值能唯一地表征这一信号, 且可从样本中恢复信号。

为了表示采样, 需要周期冲激串乘待采样连续时间信号。$p(t)$ 为采样函数, T 为采样周期, $p(t)$ 频率 $\omega_s = 2\pi/T$ 为采样频率:

$$x_p(t) = x(t)\cdot p(t) \qquad (1)$$

where: $$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \qquad (2)$$

Then: $$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,\delta(t-nT) \qquad (3)$$

又: 利用性质: $y(t) = h(t)\cdot x(t) \Rightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H(j\theta)X(j(\omega-\theta))d\theta.$

有:

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T}) \qquad (4)$$

$$X_p(j\omega) = \cdots = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)) \qquad (5).$$

也就是说: $X_p(j\omega)$ 是 ω 的周期函数, 由一组位移的 $X(j\omega)$ 叠加而成, 且在幅度上有变化。

且关键是: 考虑原 $X_p(j\omega)$ 中 ω_M. 若 $\omega_M < \omega_s - \omega_M$, i.e., $\omega_s > 2\omega_M$, 则平移后无重叠现象! 而 $\omega_s < 2\omega_M$ 将存在重叠。这便是更详细的 Sampling Theorem

其中: $\omega_s > 2\omega_M$, 而 $2\omega_M$ 一般称为奈奎斯特速率 (Nyquist Rate)

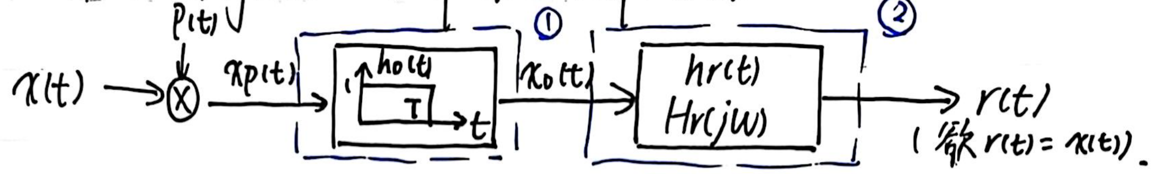
*: H(jw) 如 * 中所示: 在 $(-W_c, W_c)$ 中为常数.

又例用: $\frac{W}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right) \xrightarrow{F} X(w) = \begin{cases} 1, & 0 \le |w| < W \\ 0, & W < |w| \le \pi \end{cases}$

上述操作中, p(t) 帮了大忙; 但实际中, 产生 p(t) 很难。因此使用零阶保持 (zero-order hold) 产生采样信号 $x_p(t)$ 更方便。

Equivalent: Impulse-train Sampling + an LTI system with a rectangular impulse response.

欲:



① 零阶保持: 某一瞬间采样并保持这一样本值至下一样本被采

② 重建滤波器: 依时移:

$$H_o(jw) = e^{-jwT/2}\left[\frac{2\sin(wT/2)}{w}\right] \qquad (6).$$

欲: $H_o(jw) H_r(jw) = X(jw)$ (7).

$$\therefore \quad H_r(jw) = \frac{e^{jwT/2} H(jw)}{\frac{2\sin(wT/2)}{w}} \qquad (8)$$

其中 H(jw) 是用于从 $X_p(jw)$ 恢复 X(jw) 的 ideal low-pass filter *.

二. 利用内插由样本重建信号

Interpolation 是样本值重建某一函数的常用过程。一种简单的便是线性内插。当然, 插值可更为复杂。

之前有:

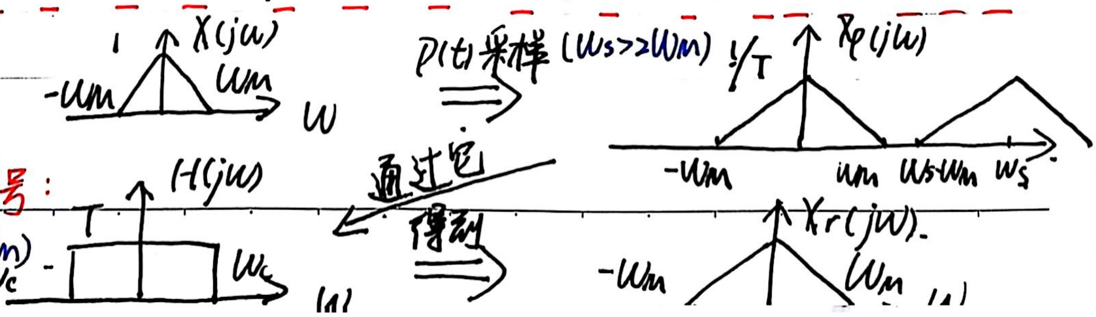
$$x_r(t) = x_p(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\left[\delta(t-nT) * h(t)\right] \qquad (9)$$

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\, h(t-nT) \qquad (10).$$

(10) 中, x(nT) 是样本点, 则(10)式体现了样本点如何拟合成曲线, 代表一种内插公式: 又:

理想低通filter中: $h(t) = \frac{T W_c}{\pi} \frac{\sin W_c t}{W_c t}$ * (11).

*: 利用 ideal low-pass filter 恢复连续时间信号: $(W_m < W_c < W_s - W_m)$



No.

Date

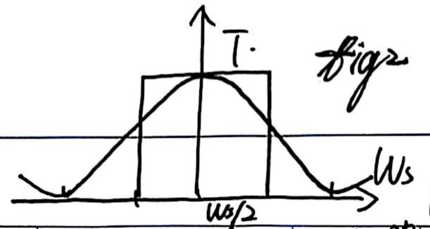


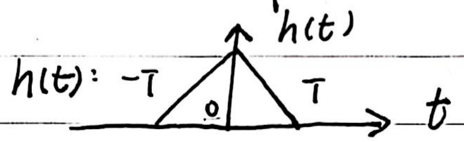
fig2

则 $x_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\ \frac{TW_c}{\pi}\ \frac{\sin W_c(t-nT)}{W_c(t-nT)}$ (12)

利用ideal low-pass filter的内插称为带限内插。(12)式中，W_c可取$W_s/2$ (if $W_s>2W_m$，则 $W_m<W_c<W_s-W_m$)

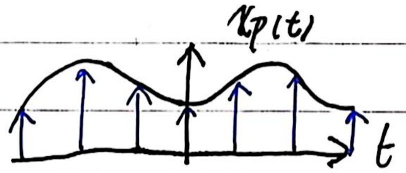
零阶保持(不加filter)的频谱见fig2，可知：它是粗糙的近似。

可以考虑高阶保持，如First-order hold. (triangular impulse response)

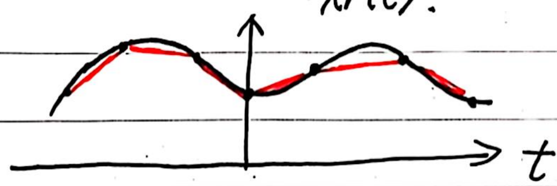


Linear Interpolation

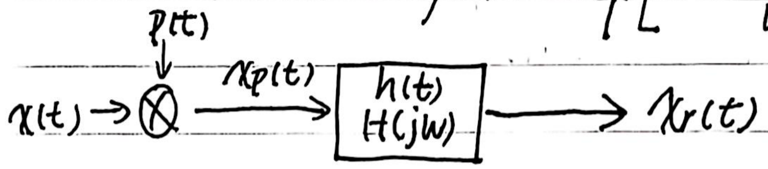
fig3



$\Rightarrow$



$$H(jW)=\frac{1}{T}\left[\frac{\sin(WT/2)}{W/2}\right]^2 \quad (13)$$



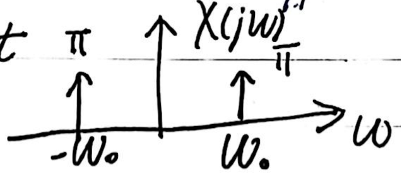
三、欠采样效果：混叠现象

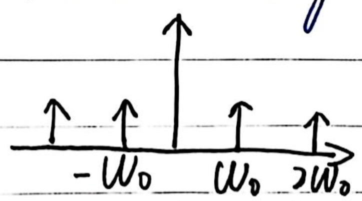
当$W_s>2W_m$时，采样信号的频谱是由$x(t)$频谱重复组成的。

但$W_s<2W_m$时，the individual spectrums overlap

那么$W_s=2W_m$呢？Not sufficient to avoid aliasing!

Eg: $x(t)=\cos W_0 t$





Eg. $x(t)=\cos(\frac{W_s}{2}t+\phi)$，以$W_s$采样，若采样的冲激信号作为输入加到一个截止频率为$W_s/2$的理想低通滤波器，则输出：

$$x_r(t)=\cos\phi\cos(\frac{W_s}{2}t)$$

可见：仅在 $\phi = 2k\pi$ 下，$x_r(t) = x(t)$

因此采样定理明确要求采样频率大于信号中最高频率2倍

四. 连续时间信号的离散时间处理

许多应用中：CT signal → DT → process → CT

上述流程中过程可抽象为下述级联：

$$x_c(t) \to \boxed{\text{CT to DT}}_{①} \xrightarrow{x_d[n]} \boxed{\text{DT system}} \xrightarrow{y_d[n]} \boxed{\text{DT to CT}}_{②} \to y_c(t)$$

可见：通过这样一个周期采样，$x_c(t)$ 可用一串瞬时样本 $x_c(nT)$ 来表示：

$$x_d[n] = x_c(nT)$$

①：C/D conversion　　　②：D/C conversion

D/C 转换实现的是它的输入的各样本点间的内插：

$$y_d[n] = y_c(nT)$$

C/D conversion：以下用 ω 表示 CT signal 频率，$\Omega \to$ DT

$$x_c(t) \to \bigotimes \xrightarrow{x_p(t)} \boxed{\text{冲激串 to DT}} \to x_d[n] = x_c(nT), \quad p(t) \downarrow \bigotimes$$

分析有：

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\,\delta(t-nT)$$

$$X_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\,e^{-j\omega nT}$$

而：

$$X_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_d[n]\,e^{-j\Omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\,e^{-j\Omega n}$$

因此：

$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p(j\Omega/T)$$

又：

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j(\omega - k\omega_s))$$

$$X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j(\Omega - 2\pi k)/T)$$

$X_d(e^{j\Omega})$ & $X_p(jw)$

Date

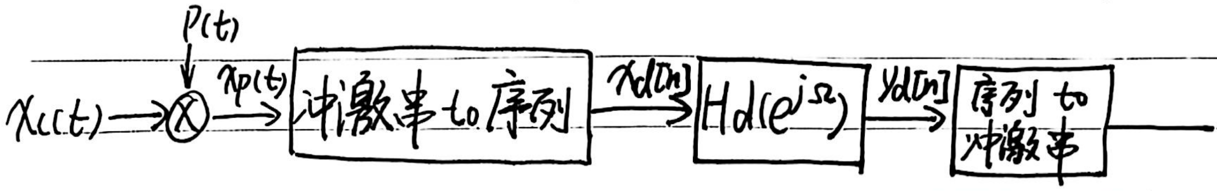
上述推导中展示了：$X_p(jw)$ & $X_c(jw)$；$X_d(e^{j\Omega})$ & $X_c(jw)$ 间关系

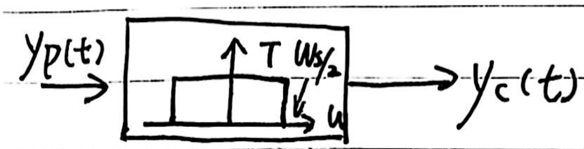
☆：$X_d(e^{j\Omega})$ 就是 $X_p(jw)$ 的重复 ($X_d(e^{j\Omega}) = X_p(j\Omega/T)$)

唯频率坐标有一个尺度变换；且 $X_d(e^{j\Omega})$ 是 $\Omega, T=2\pi$ 的周期函数

且：频域为 T 倍，时域则为 1/T 倍，则 informally 可视 $x_p(t) \rightarrow x_d[n]$ 过程中时间轴有一个 1/T 尺度变换

D/C conversion：$y_d[n]$ 产生连续时间冲激串 $y_p(t)$，可用于恢复 $y_c(t)$





*：恢复 $y_c(t)$ 是用低通滤波实现的

因此，整个系统相当于 $H_c(jw)$ 的连续时间系统：

$(\Omega = wT)$ △：$H_c(jw) = \begin{cases} H_d(e^{jwT}), & |w| < w_s/2 \\ 0, & |w| > w_s/2 \end{cases}$

Application：Digital Differentiator 数字微分器

考虑：$H_c(jw) = jw$ ($H_d(e^{j\Omega}) = j\frac{\Omega}{T}$)

则 $H_c(jw) = \begin{cases} jw, & |w| < w_c \\ 0, & |w| > w_c \end{cases}$

而：$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$，则 $Y(jw) = jw X(jw)$

故只要 $x_c(t)$ 采样无混叠，则 $y_c(t) = \frac{dx_c(t)}{dt}$

五. 离散时间采样

Consider：$x_p[n] = \begin{cases} x[n], & \text{if } N|n \\ 0, & \text{else} \end{cases}$，Then：

$x[n] \rightarrow \otimes \rightarrow x_p[n]$

$p[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-kN]$

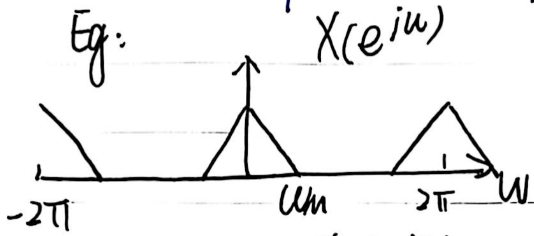
i.e., $x_p[n]=x[n]p[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN]\delta[n-kN]$

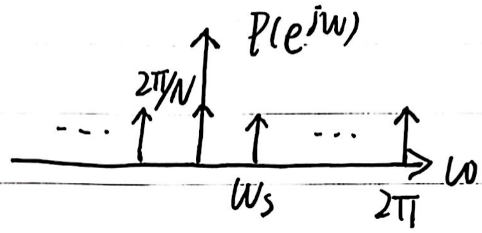
$$X_p(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}P(e^{j\theta})X(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

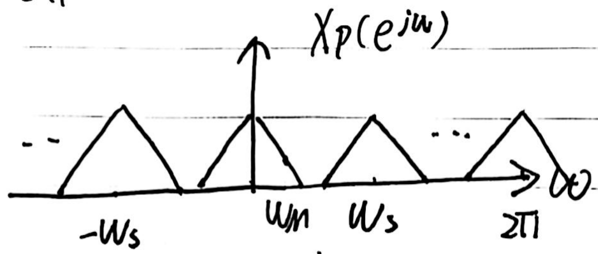
$$P(e^{j\omega})=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-k\omega_s) \quad \text{where } \omega_s=2\pi/N$$

综合有: $X_p(e^{j\omega})=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(e^{j(\omega-k\omega_s)})$

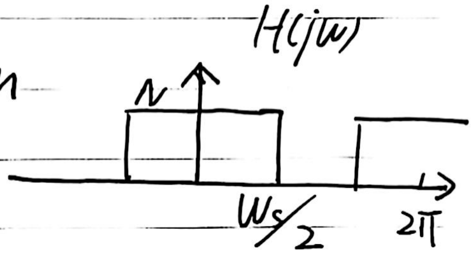
Eg:







if $\omega_s>2\omega_m$



而$x_p[n]$重建$x_r[n]$可用低通滤波器:

$$x_r[n]=x_p[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[kN]\frac{N\omega_c}{\pi}\frac{\sin\omega_c(n-kN)}{\omega_c(n-kN)}$$

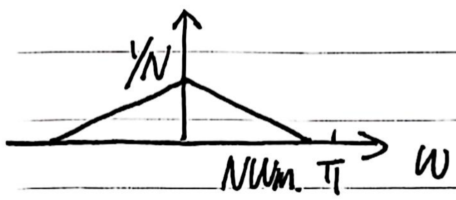
DT采样有许多应用。实际中，若不作处理而直接储存$x_p[n]$是不经济的，因为采样点间显然signal为0

∴考虑: $x_b[n]=x_p[nN]$

这被称为抽取(decimation)，则:

$$X_b(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_b[k]e^{-j\omega k}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_p[n]e^{-j\omega n/N}$$

∴ $X_b(e^{j\omega})=X_p(e^{j\omega/N})$，体现为频谱尺度变化



注意到: 若$N\omega_m>\pi$，将有aliasing，
a.k.a: down sampling