第六章 信号与系统的时域和频域特性

故事从FT的模和相位表示开始说起：

$X(j\omega)$在$\forall\omega$下为一个复数，而一个复数可以有两种表示方式：

$ke^{j\theta} = k\cos\theta + jk\sin\theta$，因此可视为模长+相位角

故有：
$$X(j\omega) = |X(j\omega)|\, e^{j\measuredangle X(j\omega)} \quad (1)$$
$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|\, e^{j\measuredangle X(e^{j\omega})} \quad (2)$$

模 $|X(j\omega)|$ 描述的是一个信号基本频率含量，即组成$x(t)$的各复指数信号相对振幅信息。$|X(j\omega)|^2$可看成$x(t)$能谱密度（因为Parseval）。

而 $\measuredangle X(j\omega)$ 提供复指数信号相对相位信息。一般$X(j\omega)$相位函数变化会导致$x(t)$ $\boxed{\text{时域}}$特性改变。

那么LTI响应的模与相位形式表示：
$$H(j\omega) = |H(j\omega)|\, e^{j\measuredangle H(j\omega)} \quad (3)$$
$$Y(j\omega) = H(j\omega)\cdot X(j\omega) = |X(j\omega)||H(j\omega)|\, e^{j\measuredangle H(j\omega)} \quad (4)$$

因上式，$|H(j\omega)|$ 称为系统的增益(gain)，$\measuredangle H(j\omega)$称为相移(phase shift)。若$X(j\omega)$的模、相位在不被希望改变的情况下被$|H(j\omega)|$与$\measuredangle H(j\omega)$改变，则称为幅度与相位失真(distortion)

对于 $H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$，$|H(j\omega)| = 1$，$\measuredangle H(j\omega) = -\omega t_0$，关于$\omega$线性

则 $Y(j\omega) = |X(j\omega)|\cdot e^{j\measuredangle X(j\omega) - \omega t_0} = X(j\omega)\, e^{-j\omega t_0}$
$$\therefore y(t) = x(t - t_0) \quad (5)$$

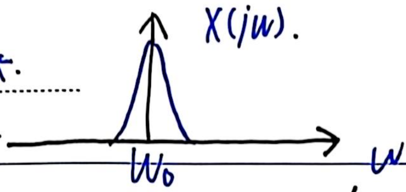
相移为ω线性函数时，输出体现出输入的时移。

该系统因此得名：Linear phase system

而 Non Linear phase system 中：
$$H(j\omega) = H_1(j\omega)\, H_2(j\omega), \text{ where: } |H(j\omega)| = 1 \quad (6)$$
$$H_1(j\omega) = e^{-j\omega t_0}, \quad H_2(j\omega) = e^{j\measuredangle H_2(j\omega)}$$

No. *.

Date



$x(t)$ 的 $X(j\omega)$ 仅在 $\omega=\omega_0$ 左右附近有值.

i.e., 把 $H(j\omega)$ 拆成了时移 + 相位变化两步

考虑一个 nonlinear function of ω : $\angle H(j\omega)$。对于窄带输入*. $x(t)$ 来说，可用线性关系近似系统相位特性:

$$\measuredangle H(j\omega) \simeq -\phi-\omega\alpha \qquad (7).$$

则:
$$Y(j\omega) \simeq X(j\omega)\,|H(j\omega)|\,e^{-j\phi}e^{-j\omega\alpha} \qquad (8).$$

发现：延迟了 α 秒，这称为在 $\omega=\omega_0$ 的群延迟 (group delay)

在每个频率上的群延迟就等于在那个频率上相位特性斜率负值:

$$\tau(\omega)=-\frac{d\{\measuredangle H(j\omega)\}}{d\omega}. \qquad (9).$$

之前提过: $|Y(j\omega)|=|H(j\omega)|\,|X(j\omega)|$，故可以用对数:

$$\log|Y(j\omega)| = \log|H(j\omega)|+\log|X(j\omega)| \qquad (10)$$

伯德图: 对数频率坐标: $20\log_{10}|H(j\omega)|$ 和 $\measuredangle H(j\omega)$ 对于 $\log_{10}(\omega)$ 的图称为伯德图。

理想频率选择性滤波器时域特征:

一个连续时间理想低通滤波器:

$$H(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\le\omega_c\\ 0, & |\omega|>\omega_c\end{cases} \qquad (11)$$

一个离散时间理想低通滤波器:

$$H(e^{j\omega})=\begin{cases}1; & |\omega|\le\omega_c\\ 0; & \omega_c<|\omega|\le\pi\end{cases} \qquad (12).$$

它们有零相位特性，故不引入相位失真

(11) 的单位冲激响应是:

$$h(t)=\frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$$

(12) 是:
$$h[n]=\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$

非理想滤波器的时域和频域特性讨论略

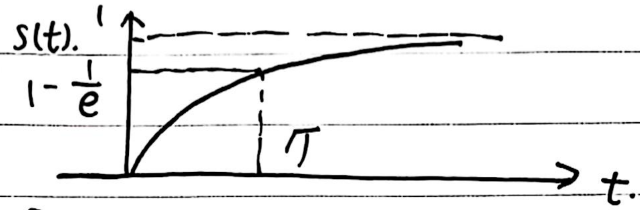
一阶与二阶连续时间系统：

一阶：$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$ (13)

则 $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau+1}$，$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t)$ (14)

阶跃：$s(t) = h(t) * u(t) = [1 - e^{-t/\tau}] u(t)$ (15)

这个τ是什么参数？它称为时间常数，控制一阶系统响应的快慢



$\tau\downarrow$，阶跃上升越快

而 Bold Plot：$20\log_{10}|H(j\omega)| \simeq \begin{cases} 0, & \omega \ll 1/\tau \\ -20\log_{10}(\omega) - 20\log_{10}(\tau), & \omega \gg 1/\tau \end{cases}$

可见：在低高频中，渐近线均为直线。

二阶：$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t)$. (16).

$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$ (17)

若 $\zeta=1$，则 critically damped：$h(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} u(t)$ (18)

而 $\zeta\neq1$，$H(j\omega) = \frac{M_1}{j\omega - C_1} - \frac{M_2}{j\omega - C_2}$ (19)

$C_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$，$M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}} = M_{1,2}$

$h(t) = M[e^{C_1 t} - e^{C_2 t}] u(t)$ (20).

C_1, C_2 均为实数；$\zeta\in(0,1)$，欠阻尼；$\zeta\in(1,+\infty)$，过阻尼

Impulse Response
$$\begin{cases} \zeta<1: \text{欠阻尼}: h(t) = \frac{\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} [\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t)] u(t) \\ \zeta=1: h(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} u(t) \\ \zeta>1: \text{过阻尼}: h(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}} [e^{C_1 t} - e^{C_2 t}] u(t) \end{cases}$$