第五章　离散时间傅里叶变换

连续与离散信号在分析中有许多类似的现象，但也有一些重大差别

还记得DS信号的FS：

$$\tilde{x}[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (1)$$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}\tilde{x}[n]\, e^{-jk(2\pi/N)n} \quad (2)$$

我们如X(jw)般定义DS的X(jw)：

$$X(jw)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-jwn} \quad (3)$$

则可见：

$$a_k=\frac{1}{N}X(e^{jkw_0}) \quad (4)$$

(4)代入(1)有：

$$\tilde{x}[n]=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=<N>} X(e^{jkw_0})e^{jkw_0 n}w_0 \quad (5)$$

上述推导是建立在周期N上的。同连续FT推导一样，此处是令：若信号 $[-N_1, N_2]$ 间有信号而其余均 $x[n]=0$（有限持续期），则人为以N为周期补充它，再视 $N\to+\infty$

则 $N\to+\infty$，$\tilde{x}[n]\to x[n]$，有：

$$\begin{cases} x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{jw})e^{jwn}dw & (6)\\ X(e^{jw})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-jwn} & (7)\end{cases}$$

连续FT中：

$$\begin{cases} x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(jw)e^{jwt}dw & (8)\\ X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-jwt}dt & (9)\end{cases}$$

对比发现：(7)式用Σ求和，而(6)在2π间隔内积分，因为 $X(e^{jw})$ 与 e^{jwn} 均关于w周期为2π，与DS的FS时只取一个周期相似

而这来自于一个事实：在频率上相差2π的DS复指数信号是完全一样的

例：(1) $x[n]=a^n u[n]$，$|a|<1$，$X(e^{jw})=?$

$$X(e^{jw})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n]e^{-jwn}=\sum_{n=0}^{\infty}(ae^{-jw})^n=\frac{1}{1-ae^{-jw}}$$

(2). $x[n]=\begin{cases}1, & |n|\le N_1\\ 0, & |n|>N_1\end{cases}$　$X(e^{jw})=?$

$$X(e^{jw})=\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jwn}=\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jw(m-N_1)}=e^{jwN_1}\sum_{m=0}^{2N_1}e^{-jwm}$$

$$=e^{jwN_1}\frac{1-e^{-jw(2N_1+1)}}{1-e^{-jw}}=\frac{\sin[w(N_1+1/2)]}{\sin(w/2)}$$

Date

关于DS FT收敛问题：DS FS中提到，$a_k = a_{k+N}$，故收敛问题不存在。但是FT，需要考虑：$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$ 是否收敛。

故：有限能量：$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty$

绝对可和：$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty$

而对于 $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$ 因为是有限区间上积分，故无收敛问题

特别地：若 $|\omega| \le W$ 的复指数信号近似 $x[n]$，即 $\hat{x}[n]$，则若 $W=\pi$，则 $\hat{x}[n] = x[n]$，看不到吉布斯现象！

周期信号的傅里叶变换：与连续情况类似：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N}) \quad (10)$$

特别地：$x[n] = e^{j\omega_0 n}$ 下，则：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l).$$

DS的FT性质的探讨：

· 周期性：~~好~~ 这一点连续FT没有！ $X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$

· 线性：$x_1[n] \xleftrightarrow{F} X_1(e^{j\omega})$ $\quad a x_1[n] + b x_2[n] \xleftrightarrow{F} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$

$x_2[n] \xleftrightarrow{F} X_2(e^{j\omega})$

· 时移&频移：$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$ $\begin{cases} x[n-n_0] \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega}) \\ e^{j\omega_0 n}x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j(\omega-\omega_0)}) \end{cases}$

· 共轭与共轭对称：$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$，则：

$x^*[n] \xleftrightarrow{F} X^*(e^{-j\omega})$ ；若 $x[n]$ 为实值序列，则 $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$

有：$Ev\{x[n]\} \xleftrightarrow{F} Re\{X(e^{j\omega})\}$

$Od\{x[n]\} \xleftrightarrow{F} jIm\{X(e^{j\omega})\}$

· 时间反转：$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) \Rightarrow x[-n] \xleftrightarrow{F} X(e^{-j\omega})$

则：$x[n]$ 实偶，$X(e^{j\omega})$ 实偶；

$x[n]$ 实奇，$X(e^{j\omega})$ 纯虚奇.

$*$ $f[n] \xleftrightarrow{FS} \frac{1}{N} g[-k]$ 　① $n \to k$

$g[n] \xleftrightarrow{FS} f[k]$ 　② 找它对应的 $g[n]$

③ $g[n] \to \frac{1}{N} g[-k]$

· 差分与累加: $x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{jw})$. 则:

$$x[n]-x[n-1] \xleftrightarrow{F} (1-e^{-jw})X(e^{jw})$$

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-e^{-jw}} X(e^{jw}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(w-2\pi k)$$

这两个式子与连续情况的很不一样

例: 求 $F\{u[n]\}$, 有: $\delta[n] \xleftrightarrow{F} 1$, $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} g[m]$

$$\therefore F\{u[n]\} = \frac{1}{1-e^{-jw}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(w-2\pi k)$$

· 时域扩展: 令k为正整数, 定义: $x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & k \mid n \\ 0, & k \nmid n \end{cases}$

则: $x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{jkw})$, 可见k↑, $x_{(k)}[n]$ 时域上拉开, 频域上压缩

· 频域微分: $x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{jw})$,

$$\frac{dX(e^{jw})}{dw} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -jn\,x[n]e^{-jwn}, \quad n\,x[n] \xleftrightarrow{F} j\frac{dX(e^{jw})}{dw}$$

· Parseval: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{jw})|^2 dw$

上述是基本性质, 而与连续信号类似地, DS信号也有卷积、乘积、对偶性质

· 卷积性质: $y[n] = x[n] * h[n]$, 则:

$$Y(e^{jw}) = X(e^{jw})H(e^{jw})$$

几乎与连续情况一样!

· 乘积性质: $y[n] = x_1[n]\,x_2[n]$, 则:

$$Y(e^{jw}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\boxed{2\pi}} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(w-\theta)})d\theta$$

· 对偶性质: $f[m] = \frac{1}{N}\sum_{r=\langle N\rangle} g[r]e^{-jrwm}$

$m=k,\ r=n$ 　　　　$m=n,\ r=-k$

$f[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} g[n]e^{-jkwn}$ 　　$f[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} g[-k]e^{jk(2\pi/N)n}$

则: $g[n] \xrightarrow{FS} f[k]$ 　　$f[n] \xrightarrow{FS} \frac{1}{N} g[-k]$

上述为关于DS的FS对偶关系 $*$

Date

而 DS的 FT对偶关系：

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \qquad X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}.$$

$(t=-\omega)$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt.$$

$(n\to k\omega_0)$

具体而言：① $x[n]$，令 $n\to k\omega_0$，$x[k\omega_0]=a_k$

② 由 a_k 求出 $g(t)$. $g(t)\xrightarrow{FS} a_k$

③ $X(e^{j\omega})=g(-\omega)$

最后是"由线性常系数差分方程表征的系统"

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y[n-k]=\sum_{k=0}^{M}b_k x[n-k]$$

则 $$H(e^{j\omega})=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N}a_k e^{-jk\omega}}$$ 不是 $(j\omega)^k$

例：$y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=2x[n]$，$x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$，$y[n]=?$

$$H(e^{j\omega})=\frac{2}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-2j\omega}}=\frac{2}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})}$$

$$X(j\omega)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \qquad \therefore Y(e^{j\omega})=\frac{4}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}-\frac{2}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})^2}+\frac{8}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$y[n]=\left[-4\left(\frac{1}{4}\right)^n-2(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n+8\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]$$

重要！基本FT对！

$x[n]=\begin{cases}1, & |n|\le N_1\\ 0, & N_1<|n|\le N/2\end{cases}$ $x[n+N]=x[n]$，$F\{x[n]\}=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\delta(\omega-\frac{2\pi k}{N})$

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-kN]$，$F\{x[n]\}=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[\omega-\frac{2\pi k}{N}]$

$a^n u[n], |a|<1, \Rightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$，$x[n]=\begin{cases}1, & |n|\le N_1\\ 0, & |n|>N_1\end{cases}$，$F\{x[n]\}=\frac{\sin[\omega(N_1+\frac{1}{2})]}{\sin(\omega/2)}$

$\delta[n]\Rightarrow 1$，$u[n]\Rightarrow\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\pi\delta(\omega-2\pi k)$，$\delta[n-n_0]\Rightarrow e^{-j\omega n_0}$

Campus $(n+1)a^n u[n], |a|<1 \Rightarrow \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$，$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}a^n u[n], |a|<1$