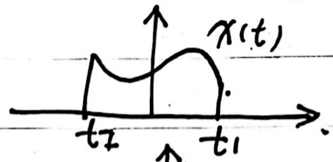
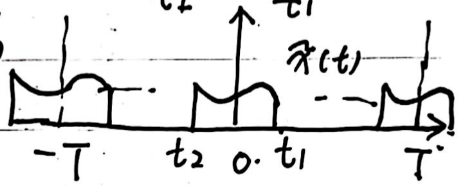
第四章复习　　连续时间傅里叶变换

上一章中，我们用FS去表示连续周期信号，发现它可由成谐波关系的基本复指数信号。那么非周期呢？我们大胆猜想，$T\to\infty$，$\omega\to 0$，频率上应无限小地使谐波频率们靠近。因此在ω上，应该是$\int$，而非Σ。换而言之：周期变成无穷大时，这些频率分量就形成了一个连续域。



不妨举个例子以便于可视化，对于非周期信号$x(t)$来说，不妨以它构造$\tilde{x}(t)$，$\tilde{x}(t)$为周期信号，有$T=2\pi/\omega_0$，则$\tilde{x}(t)$有：



$$\begin{cases}\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0} & (1)\\ a_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\tilde{x}(t)e^{-jk\omega_0 t}dt & (2)\end{cases}$$

此刻，$T\to+\infty$，则任意有限时间段内，$x(t)=\tilde{x}(t)$

则 $a_k=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$　　(3)

我们定义Ta_k的包络$X(j\omega)$为：

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt \quad (4)$$

则 $a_k=\frac{1}{T}X(jk\omega_0)$　　(5)

$$\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t} \quad (6)$$

把 $T=2\pi/\omega_0$ 代入：

$$\tilde{x}(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}\omega_0 \quad (7)$$

(7)式中，$\omega_0\to 0$，$k\to\pm\infty$，$X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}=X(j\omega)e^{j\omega t}\big|_{\omega=k\omega_0}$，$k\omega_0\in\mathbb{R}$，这很符合微积分定义！(一个个微小矩阵总面积)

则 $\tilde{x}(t)\big|_{T\to\infty}=x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$　　(8)

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt \quad (9)$$

No.

Date

(8)(9)式称为傅里叶变换对，$X(j\omega)$称为$x(t)$的傅里叶变换/积分，而(8)式称为傅里叶逆变换，$X(j\omega)$也称为$x(t)$的频谱

(Fourier Transform)

有了表达式，如FS那时一样，我们也很关心FT的收敛

条件一：$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2 dt < 0$ ⟹ $X(j\omega)$有限

二：$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|dt < \infty$

三：任意有限区间内，$x(t)$只有有限个max&min

四：任意有限区间内，$x(t)$仅有有限个不连续点，且每个不连续点均必须为有限值

FT例子：$x(t) = e^{-at}u(t) \quad a>0$

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a+j\omega}, \ a>0$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} dt$$

那么刚才对aperiodic continuous信号FT，那么periodic呢？
我们可以用$\delta(\omega-k\omega_0)$来框定冲激$X(j\omega)$的方式：

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega-k\omega_0) \quad (10)$$

$$\text{则 } x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega-k\omega_0)\right] e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (11).$$

(10)式给出了a_k与$X(j\omega)$的关系(periodic).

类似FS，FT也有大量性质：首先，依然定义notation：

$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k \qquad x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$

$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}. \qquad x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\}$

1. Linearity： $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \qquad y(t) \xleftrightarrow{F} Y(j\omega)$

$ax(t) + by(t) \xleftrightarrow{F} aX(j\omega) + bY(j\omega)$

2. Time Shifting： $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$

$x(t-t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega_0 t_0} X(j\omega)$

Proof: $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$

$x(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underline{\left(e^{-j\omega t_0} X(j\omega)\right)} e^{j\omega t} d\omega$

许多proof思路与之一致

3. Conjugation and Conjugate Symmetry

$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$，则 $\boxed{x^*(t)} \xleftrightarrow{F} X^*(-j\omega)$.

Proof: $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$.

$X^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)e^{-j\omega t}]^* dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{j\omega t} d(t)$.

$X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boxed{x^*(t)} e^{-j\omega t} d(t)$.

许多proof思路也与之一致

Conjugation Symmetry. $X(-j\omega) = X^*(j\omega)$，$x(t)$为实信号

4. Time Reversing $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$, $x(-t) \xleftrightarrow{F} X(-j\omega)$.

※若$x(t)$为实信号，$x(t)$拆为奇-偶：$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$

则 $F\{x(t)\} = \underbrace{F\{x_e(t)\}}_{= Re\{X(j\omega)\}} + \underbrace{F\{x_o(t)\}}_{= Im\{X(j\omega)\}}$

这是因为$x(t)$若为even，则$\underline{X(j\omega)} = X(-j\omega)$.；$x(t)$若实，$X(-j\omega) = X^*(j\omega)$

$\Rightarrow$ $X(j\omega)$纯实；odd同理，$X(j\omega)$纯虚

No.

Date

$*$: $X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)_a e^{-jwt}dt$ $= -\frac{1}{jw}e^{-jwt}\Big|_{-1}^{1}$ $= \frac{e^{jw}-e^{-jw}}{jw} = \frac{2\sin w}{w}$

$*$: $X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)_b e^{-jwt}dt.$ $=\int_{-\infty}^{+\infty} -(\delta(-1)+\delta(1))e^{-jwt}dt$ $= -e^{jw}-e^{-jw}$

5. 微分与积分：$x(t) \xleftrightarrow{F} X(jw)$

则 $\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} jwX(jw)$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{jw}X(jw)+\pi X(0)\delta(w)$$

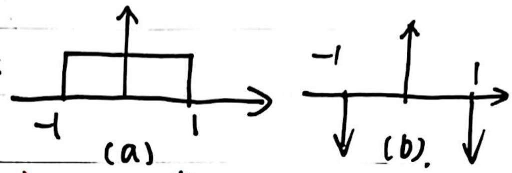
例：求 $u(t)$ 的 $X(jw)$.

可知：$g(t)=\delta(t) \xleftrightarrow{F} G(jw)=1^{*}$，$u(t)=\int_{-\infty}^{t} g(\tau)d\tau$

$*$ $G(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-jwt}dt = e^{-jw\cdot 0}=1$

$\therefore X(jw)=\frac{1}{jw}G(jw)+\pi G(0)\delta(w) = \frac{1}{jw}+\pi\delta(w)$

例：$x(t)$: 

$g(t)$: 

$g(t)=\frac{d}{dt}x(t)$，是一个矩形脉冲和两个冲激函数的和 $*$

$*$ 为什么？因为其实 -1, 1 处.信号突变！这种操作也是常规，需牢记！用来处理不连续点。↳而突变用冲激信号表示

(a): $X(jw)=\left(\frac{2\sin w}{w}\right)$ (b): $X(jw)=-e^{jw}-e^{-jw}$ $*$

$\therefore g(t)$: $G(jw)=\left(\frac{2\sin w}{w}\right)^{*}-e^{jw}-e^{-jw}$

$\therefore x(t)$: $X(jw)=\frac{G(jw)}{jw}+\pi G(0)\delta(w)$，$G(0)=0$

$$\Rightarrow X(jw)=\frac{2\sin w}{jw^2}-\frac{2\cos w}{jw}$$

6. 时间与频率的尺度变换

$x(t) \xleftrightarrow{F} X(jw)$，则 $x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{jw}{a}\right)$

Proof: $X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-jwt}dt$

而 $\int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-jwt}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j(w/a)t}d(t/a)$

$$=\begin{cases}\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j(w/a)t}dt \\ -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j(w/a)t}dt\end{cases}$$

因此：$\frac{1}{|a|}X\left(j\cdot\frac{w}{a}\right)$

No.

Date

7. 对偶性质

$$
\begin{tikzcd}
x_1(t) \arrow[r, leftrightarrow, "F"] \arrow[dr, leftrightarrow] & X_1(j\omega) \arrow[dl, leftrightarrow] \\
x_2(t) \arrow[r, leftrightarrow, "F"] & X_2(j\omega)
\end{tikzcd}
$$

$\boxed{令\ x_1(t)\ 中,\ t=\omega}$

$X_2(j\omega)=x_1(\omega)$

则 $F^{-1}\{X_2(j\omega)\}$ 有:

$$x_2(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$\boxed{求出\ x_2(t)}$, 然后有 $2\pi x_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

$\boxed{令\ t=-t}$, 我们应已知 $x_2(-t)$:

$$2\pi x_2(-t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(\omega)e^{-j\omega t}d\omega$$, $\boxed{再\ \omega.t\ 名义对调}$:

$$2\pi x_2(-\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(t)e^{-j\omega t}dt$$

$\therefore F\{x_1(t)\}=2\pi x_2(-\omega)$

例: $g(t)=\dfrac{2}{1+t^2}$

step1: $t=\omega$: $X_2(j\omega)=\dfrac{2}{1+\omega^2}$

则 $x_2(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X_2(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{2}{1+\omega^2}e^{j\omega t}d\omega$

step2:

事实上: $x(t)=e^{-a|t|}$, $a>0$,

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{0}e^{at}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-at}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{a-j\omega}+\frac{1}{a+j\omega}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$\therefore x_2(t)=e^{-|t|}$, 则 $t=-t$ 有:

$$2\pi e^{-|t|}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{1+\omega^2}e^{-j\omega t}d\omega$$

step3: $t.\omega$ 名义对调:

$$2\pi e^{-|\omega|}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{1+t^2}e^{-j\omega t}dt=G(j\omega)$$

$\therefore G(j\omega)=2\pi e^{-|\omega|}$

8. 帕塞瓦尔定理:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|^2d\omega$$

Date

在上述几大性质外，还有一条格外重要的性质：卷积性质

之前第三章中，FS表示了signal后，过LTI系统后的响应也可FS表示

那么 aperiodic 呢？此处直接由卷积积分出发导出结论：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (12)$$

则 $Y(j\omega)=\mathcal{F}\{y(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right]e^{-j\omega t}dt \quad (13).$

Fubini交换：$Y(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{h(t-\tau)e^{-j\omega t}}dt\right]d\tau. \quad (14).$

（先 τ 后 t ⟹ 先 t 后 τ）　↳ $t:=t-\tau$. 有：

$$Y(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)e^{-j\omega\tau}H(j\omega)d\tau = H(j\omega)\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau.$$

$$=H(j\omega)X(j\omega) \quad (15).$$

$\therefore\ y(t)=h(t)*x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\omega)=H(j\omega)X(j\omega).$

例：$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$，则 $x(t)\longrightarrow LTI \longrightarrow y(t)$ 中：

$h(t)=u(t)^*$　这是因为：$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau.$

要求 $\tau>t$ 时，被积者为0　$\therefore h(t-\tau)=u(t-\tau)=\begin{cases}1, & \tau\le t.\\ 0, & \tau>t.\end{cases}$

$\therefore Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)$，而 $u(t)$ 的 $H(j\omega)$.

$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t)dt$，$\delta(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}1$　故依积分性质：

$$H(j\omega)=\frac{1}{j\omega}\underline{G(j\omega)}+\pi\underline{G(0)}\delta(\omega)=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

$$\therefore Y(j\omega)=\frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$$，与积分性质一致

例：$x(t)\rightarrow h(t)\rightarrow y(t)$. $h(t)=e^{-at}u(t)$, $a>0$；$x(t)=e^{-bt}u(t)$, $b>0$; $a\neq b$

则 $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(b+j\omega)t}dt=\frac{1}{b+j\omega}$，$H(j\omega)=\frac{1}{a+j\omega}$

$\therefore Y(j\omega)=\frac{1}{(a+j\omega)(b+j\omega)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a+j\omega}-\frac{1}{b+j\omega}\right)$ 很眼熟

则 $y(t)=\frac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)u(t)$.

Tip：$e^{-a|t|}\ (a>0)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\frac{2a}{a^2+\omega^2}$　⚠ 这两者十分重要！牢记！

$e^{-at}u(t)=\frac{1}{a+j\omega}$

性质中最后一条：相乘性质。FS中，$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$　$y(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k$，则

$x(t)y(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} \sum_l a_l b_{k-l}$，是一个不太复杂的式子

卷积性质可视为时域内卷积对应于频率的相乘：

$y(t)=h(t)*x(t)$，则 $y(t)=\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{h(t)\}\cdot\mathcal{F}\{x(t)\}\}$　　(16)

为了求 $y(t)$，"战场"从 t 转到 w，再转到 t

那对应地，相乘性质就是时域内相乘对应于频域的卷积

即：　$r(t)=s(t)p(t)$，则 $R(jw)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(j\theta)P(j(w-\theta))d\theta$　　(17)

Proof: $s(t)p(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(j\theta)e^{j\theta t}d\theta\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(jw')e^{jw't}dw'$

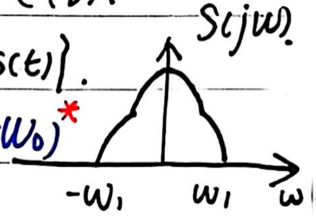
$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(j\theta)P(jw')e^{j(\theta+w')t}d\theta\, dw'$

$\overset{w'=w-\theta}{=\!=\!=}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S[j(\theta)]P(j(w-\theta))e^{jwt}d\theta\, dw$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(j\theta)P(j(w-\theta))d\theta\right]}_{\to R(jw)}e^{jwt}dw$

Note: 也可写作：$R(jw)=\frac{1}{2\pi}S(jw)*P(jw)$　　(18).

例：$p(t)=\cos(w_0t)$，$s(t)$ 频谱如图，求 $\mathcal{F}\{r(t)=p(t)s(t)\}$.

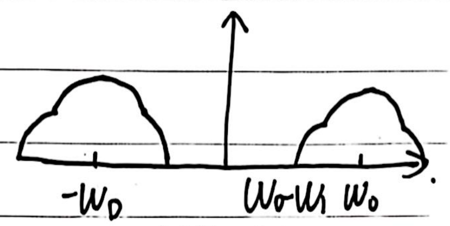


Solution: $p(t)=\frac{1}{2}(e^{jw_0t}-e^{-jw_0t})=\pi\delta(w-w_0)+\pi\delta(w+w_0)$ *

*: $\mathcal{F}\{e^{jkw_0t}\}=2\pi\delta(w-kw_0)$

则 $R(jw)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(j\theta)P(j(w-\theta))d\theta$

$=\frac{1}{2}S(j(w-w_0))+\frac{1}{2}S(j(w+w_0))$ ⇒



$(w_0>w_1)$.

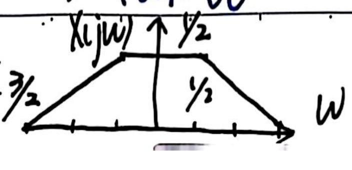
例：$x(t)=\frac{\sin(t)\sin(t/2)}{\pi t^2}$，求 $X(jw)$.

$x(t)=\pi\left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)\left(\frac{\sin(t/2)}{\pi t}\right)$，则 $X(jw)=\frac{1}{2}\mathcal{F}\{\frac{\sin(t)}{\pi t}\}*\mathcal{F}\{\frac{\sin(t/2)}{\pi t}\}$

又：$X(jw)=\begin{cases}1, & |w|<W\\ 0, & |w|>W\end{cases} \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} x(t)=\frac{\sin(Wt)}{\pi t}$，则 $X_1(jw)=\begin{cases}1, & |w|<1\\ 0, & |w|>1\end{cases}$

$X_2(jw)=\begin{cases}1, & |w|<\frac{1}{2}\\ 0, & |w|>\frac{1}{2}\end{cases}$

$\therefore X(jw)$:



(卷积结果)

最后总结由线性常系数微分方程表征的系统：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \qquad (19)$$

我们将讨论：如何确定如(19)式中这样一个LTI的频率响应问题

推导：令 $H(j\omega) \xleftrightarrow{F^{-1}} h(t)$，则 $y(t)=x(t)*h(t)$，$Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)$

$H(j\omega)=\dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$，而依(19)式有：$\sum_{k=0}^{N} a_k F\left\{\dfrac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \sum_{k=0}^{M} a_k F\left\{\dfrac{d^k x(t)}{dt^k}\right\}$

依微分性质：$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(j\omega)$

$$\therefore H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

重要 ⚠

附：基本傅里叶变换对

$F\{e^{jk\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega-k\omega_0)$ $\qquad$ $F\{1\} = 2\pi\delta(\omega)$

$x(t)=\begin{cases} 1, & |t|<T_1 \\ 0, & T_1<|t|\le \frac{T}{2} \end{cases}$，$F\{x(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \dfrac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k}\delta(\omega-k\omega_0)$

且 $x(t+T)=x(t)$

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) = x(t)$，$F\{x(t)\} = \dfrac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega-\dfrac{2\pi k}{T}\right)$

$x(t)=\begin{cases} 1, & |t|<T_1 \\ 0, & |t|>T_1 \end{cases}$，$F\{x(t)\} = \dfrac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$

$F\{\delta(t)\} = 1$ $\qquad$ $F\{u(t)\} = \dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$

$F\{\delta(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0}$ $\qquad$ $F\{e^{-at}u(t)\} = \dfrac{1}{a+j\omega}$ $(Re\{a\}>0)$

$F\{te^{-at}u(t)\} = \dfrac{1}{(a+j\omega)^2}$，$(Re\{a\}>0)$

$F\left\{\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)\right\} = \dfrac{1}{(a+j\omega)^n}$，$(Re\{a\}>0)$

$F\{e^{-a|t|}\} = \dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$，$(a>0)$. $(e^{-a|t|} = e^{-at}u(t)+e^{at}u(-t))$

求傅里叶变换方法一览

① 从基本概念出发:

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \qquad (1).$$

② 对于周期信号:

$$a_k=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \qquad (2)$$

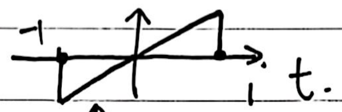
$$X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0) \qquad (3)$$

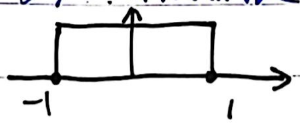
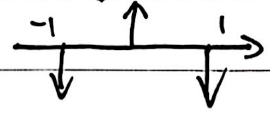
③ 微分与积分:

$$\frac{dx(t)}{dt}\xleftrightarrow{F} j\omega X(j\omega) \qquad (4)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega) \qquad (5)$$

* Tip: 信号突变点的处理

$x(t)$: 

$g(t)$:  (方波) +  (冲激)

④ 对偶性质:

$$\begin{tikzcd} x_1(t) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & X_1(j\omega) \\ x_2(t) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[ur, leftrightarrow] & X_2(j\omega) \end{tikzcd}$$

a) $x_1(t)$中, 令$t=\omega$

b). $X_2(j\omega)=x_1(\omega)$, 求 $x_2(t)=F^{-1}\{X_2(j\omega)\}$

c) $x_2(t)$中, 令 $t=-t$, 之后再 ω, t 名义对调, 得$X_1(j\omega)$

⑤ 卷积: $y(t)=x(t)*h(t)$, 则 $Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)$ (6)

⑥ 乘积: $y(t)=r(t)s(t)$, 则 $Y(j\omega)=R(j\omega)*S(j\omega)$ (7)

i.e., $Y(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} R(j\theta)\cdot S(j(\omega-\theta))d\theta$ (8)

此外, property of FT、基本傅里叶变换对都是常见且重要的工具

No.

Date

附：离散信号 FT FS 对偶推导

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jkw_0t}dt$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{jw})e^{jwn}dw$$

有 $x[n]$，求 $X(e^{jw})$？ 首先 $n=k$：视之为 $x'(t)$ 的 FS：

$x'(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$， $a_k = x[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{jw})e^{jwn}dw$

$$= \frac{1}{T}\int_T x'(t)e^{-jkw_0t}dt$$

则欲找到 $x'(t)$，且 $\underbrace{T=2\pi}$。 假设找到了这样的 $x'(t)$：

则：$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} x'(t)e^{-jkt}dt$ 这是为了形式上凑一样 为了有相同积分区间

令 $k=n$， $t=w$：

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} x'(w)e^{-jwn}dw = x[n]$$

再 $n := -n$：

$$x[-n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \underbrace{x'(w)}_{\to X(e^{jw})} e^{jwn}dw$$

$\therefore \mathcal{F}\{x[n]\} = x'(-w)$

扫描全能王 创建