No.

Date

第三章复习　　　周期信号傅里叶级数表示

Fourier Series 思想启源来自以下事实：

连续：$e^{st} \rightarrow H(s)e^{st}$。　　(1)

离散：$z^n \rightarrow H(z)z^n$　　(2)

即：一个LTI系统对复指数信号的响应也同样是一个复指数信号

而不同的只是幅度的变化，i.e.，$H(s)$. $H(z)$的存在

我们定义：

· Def：一个信号若经过系统后输出，仅是一个常数（可能复数）乘以输入信号，则称该信号为系统的特征函数(eigen function)

上述定义很好描述了(1)(2)式：对于确定的z. S来说，$H(s)$. $H(z)$便是常数，则e^{st}. z^n为特征函数

· Def：幅度因子称为系统特征值 (eigenvalue)

此处便是：$H(s)$与$H(z)$

到此一定疑惑两件事：事实为何正确？$H(s)$. $H(z)$如何求？

那么有如下推导：(1). 连续：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau$$

$$=e^{st}\cdot\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau}_{H(s)} \qquad (3)$$

因此推得：$H(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$　　(4)

(2). 离散：

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]z^{n-k}$$

$$=z^n\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]z^{-k}}_{H(z)} \qquad (5)$$

因此：$H(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]z^{-k}$　　(6)

有了上述铺垫，我们发现 e^{st}, z^n 这样形式的输入很方便计算LTI下的响应；$\boxed{\text{如果}}$ $x(t)$ 能分解成这样的形式，可就太方便了：如下：

$$x(t)=\sum_k a_k e^{s_k t} \xrightarrow{LTI} y(t)=\sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t} \quad (7)$$

$$x[n]=\sum_k a_k z_k^n \xrightarrow{LTI} y[n]=\sum_k a_k H(z_k) z_k^n \quad (8)$$

那么在之后的 Fourier Series (FS) Presentation 中，为了契合FS，人为令 $s=j\omega$, $z=e^{j\omega}$，那么：

$$x(t)=e^{j\omega t}$$
$$x[n]=e^{j\omega n} \quad (9)$$

上述便是FS的铺垫，下面回顾连续signal的FS表式：（△：周期的！）

Continuous：如果一个signal有周期，则：

$$x(t)=x(t+T),\ T\text{是min的，则：} \quad (10)$$
$$\omega_0=2\pi/T \text{ 称为基波频率}$$

那对于T为周期的 $x(t)$，假设它能拆成 $\sum_k a_k e^{jk\omega t}$

则很容易想到：

$$x(t)=\sum_k a_k e^{jk\omega t},\ x(t+T)=\sum_k a_k e^{jk\omega t}\cdot e^{jk\omega T}=x(t)$$

$$\text{i.e.,}\quad e^{jk\omega T}=1 \quad (11)$$

$$\rightarrow e^{jk\frac{2\pi}{T'}T}=1,\quad T'=T,\ \text{则}\ \omega=2\pi/T=\omega_0 \quad (12)$$

所以 $x(t)$ 应拆成：

$$x(t)=\sum_k a_k e^{jk(2\pi/T)t} \quad (13)$$

我们定义：

· Def: $\phi_k(t)=e^{jk\omega_0 t}=e^{jk\frac{2\pi}{T}t},\ k=0,\pm1,\cdots$

为成谐波关系的复指数信号集

不难观察道：$k=0$，$\phi_k(t)=1$；$k=\pm N$，$\phi_k(t)$频率均为$\pm N\omega_0$。

于是称：$k=\pm N$下的$\phi_k(t)$分量为第N次谐波分量。

$x(t)$表示成 $\sum_k a_k e^{jk\omega_0 t}$ 就称为傅里叶级数(FS)表示

$x^*(t)=x(t)$

特别地：若$x(t)$为实信号，则有一些奇妙性质：

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t},\quad x^*(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overline{a_k e^{jk\omega_0 t}}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t} = x(t). \qquad (14)$$

令$k=-k$，则应：$a_{-k}^* = a_k$ (15)

i.e.: $a_k^* = a_{-k}$ (16)

则 $$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t}\right] \qquad (17)$$

$a_{-k}=a_k^*$代入有：

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k^* (e^{jk\omega_0 t})^*\right] \qquad (18)$$

注意到：$a_k e^{jk\omega_0 t}$ 与 $a_k^* (e^{jk\omega_0 t})^*$ 共轭

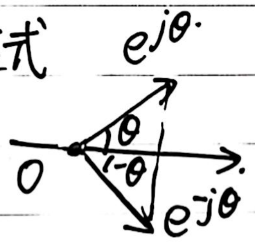
因此有：$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\{a_k e^{jk\omega_0 t}\} \qquad (19)$$

对于(19)式来说，如a_k以极坐标给出：

$$a_k = A_k e^{j\theta_k},\ 则\ x(t)=a_0+2\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}\{A_k e^{j(k\omega_0 t+\theta_k)}\}$$

$$= a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t+\theta_k) \qquad (20)$$

那么(20)式就是连续实信号的特殊FS表达式



△: $\bar{a}\bar{b} = \overline{ab}$，该公式是共轭性质之一

△: $e^{j\theta}$的共轭：$e^{-j\theta}$

同时，若a_k以 $a_k = B_k + jC_k$形式给出，(20)亦可写作：

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[B_k \cos k\omega_0 t - C_k \sin k\omega_0 t\right] \qquad (21)$$

Date . .

了解什么是FS表示：$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$后，一定想知道$a_k$怎么求

a_k式子的推导源于一个核心理念：

$$\int_0^T e^{j\hat{k}\omega_0 t} = \begin{cases} T, & \hat{k}=0 \\ 0, & \hat{k}\neq 0,\ \hat{k}\in\mathbb{Z} \end{cases} \qquad (22)$$

这是因为：$e^{j\hat{k}\omega_0 t}=\cos(\hat{k}\omega_0 t)+j\sin(\hat{k}\omega_0 t)$

$\hat{k}\omega_0$的周期为$T/\hat{k}<T$，而一个T内，$\cos(\omega_0 t)$与$\sin(\omega_0 t)$

积分均为0，则$\int_0^T \cos(\hat{k}\omega_0 t)+j\sin(\hat{k}\omega_0 t)=0$，毫无疑问

[现在想求：$\forall n$，$a_n\in\{a_k\}$，$n\in\mathbb{Z}$] ☆

那么，如何利用(22)，构造一个"只有a_n留下"的式子呢？$e^{-jn\omega_0 t}$！

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{j(k-n)\omega_0 t} \qquad (23)$$

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\int_0^T\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{j(k-n)\omega_0 t}dt=Ta_n \qquad (24)$$

因为只有k=n时，$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}=T$；$k\neq n$下，$\int_0^T a_k e^{j(k-n)\omega_0 t}dt=0$

$$\therefore\ a_n=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \qquad (25)$$

亦写作：$a_n=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \qquad (26)$

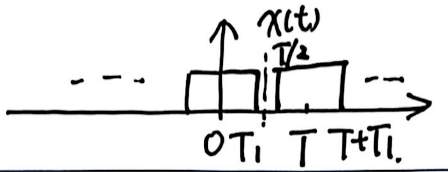
其中，$\int_T$表示在任何一个T间隔内的积分

终于，我们可以用以下一对关系式，确定FS表达：

$$\begin{cases} a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt, \\ x(t)=\sum_k a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0=\frac{2\pi}{T} \end{cases} \qquad (27)$$

称$\{a_k\}$为傅里叶系数；且关于(27)(26)，特别地：

$$a_0=\frac{1}{T}\int_T x(t)dt \qquad (28)$$ 代表$x(t)$一个T内平均值



fig

No.

Date

经典例题：求周期性方波的FS表达式：

见fig：$x(t)=\begin{cases}1, & |t|<T_1\\ 0, & T_1<|t|<T/2\end{cases}$ （一个周期内）

那么欲求 $\{a_k\}$：

$k=0$: $a_0=\frac{1}{T}\int_T x(t)dt=\frac{1}{T}\cdot 2T_1=\frac{2T_1}{T}$ (29)

$k\neq0$: $a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$

$=\frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t}dt \overset{*}{=} \frac{1}{T}\cdot -\frac{1}{jk\omega_0}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1}$

$=\frac{2}{k\omega_0 T}\cdot\frac{e^{jk\omega_0T_1}-e^{-jk\omega_0T_1}}{2j}=\frac{\sin(k\omega_0T_1)}{k\pi}$ (30)

*：千万不能 $\frac{1}{T}2\int_0^{T_1}\cdots$ 干这类不假思索的事：$e^{-jk\omega_0t}\neq e^{jk\omega_0t}$

△：值得注意：(30)中若 $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$，则发现：$\lim_{k\to0}(30)=(29)$

我们已知如何求出周期连续 $x(t)$ 的FS表达，但是不禁质问：任何周期signal都能 $x(t)\xleftrightarrow{FS}a_k$ 吗？

对于任何periodic signal，(27)总能给出 a_k；但 a_k 可能为无穷大。因此，我们在讨论：FS的收敛判断依据：

① T内能量有限：$\int_T|x(t)|^2dt<\infty$

② 绝对可积：$\int_T|x(t)|dt<\infty$ ← Dirichlet 条件

③ T内仅有有限的最大值、最小值

④ 在有限时间间隔内，只可有有限个不连续点；i.e.，不应无限跳跃或连续

最后，论述一些连续时间FS的性质：

① $x(t)\xleftrightarrow{FS}a_k$，$y(t)\xleftrightarrow{FS}b_k$，则 $Ax(t)+By(t)\xleftrightarrow{FS}Aa_k+Bb_k$

Linearity

② Shifting: $x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$，则 $x(t-t_0) \xleftrightarrow{FS} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$

Proof: $a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$

$$a_k' = \frac{1}{T}\int_T x(t-t_0) e^{-jk\omega_0 t} dt \xlongequal{t=t-t_0} \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 (t+t_0)} dt$$

$$= e^{-jk\omega_0 t_0} \cdot \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$$

③ Reversal: $x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$，$x(-t) \xleftrightarrow{FS} a_{-k}$

④ Time Scaling: $x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$，$x(\alpha t) \xleftrightarrow{FS}$?

推导：$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$

$x(\alpha t)$: $\phi_k(\alpha t) = e^{jk(\omega_0 \alpha)t}$，说明频率变了！

$$a_k' = \frac{\alpha}{T}\int_T x(\alpha t) e^{-jk\alpha\omega_0 t} dt \quad = a_k$$

$$\xlongequal{t'=\alpha t} \frac{1}{T}\int_T x(\alpha t) e^{-jk\omega_0(\alpha t)} d(\alpha t) = \frac{1}{T}\int_T x(t') e^{-jk\omega_0 t'} dt'$$

Note that: $a_k' = a_k$，但 Harmonically Related 信号集变了，
因为基波频率变了

⑤ Multiplication: $x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$ $\quad y(t) \xleftrightarrow{FS} b_k$

$x(t)y(t) \xleftrightarrow{FS} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$ ⚠

Proof: $a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \qquad b_k = \frac{1}{T}\int_T y(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$

∵ $x(t)\,y(t)$ 信号的基波频率不变

∴ $c_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, y(t)\, e^{-jk\omega_0 t} dt$

$$= \frac{1}{T}\int_T \left(\sum_{k_1} a_{k_1} e^{jk_1\omega_0}\right)\left(\sum_{k_2} b_{k_2} e^{jk_2\omega_0}\right) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$\int_T x(\tau) y(t-\tau) d\tau$

 ⑥ Convolution: $x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$，$y(t) \xleftrightarrow{FS} b_k$，$x(t)*y(t) \xleftrightarrow{FS} T a_k b_k$

若$k_1+k_2\neq k$，则$\int$为0；因此$\forall k_1, k_2$ s.t. $\int\neq 0$. 应：

$$k_1+k_2=k$$

$$\therefore C_k=\frac{1}{T}\int_T\sum_{l=-\infty}^{\infty}a_l b_{k-l}\,dt=\sum_{l=-\infty}^{\infty}a_l b_{k-l}$$

⑥ Conjugate: $x(t)\xleftrightarrow{FS}a_k$. 则 $x^*(t)\xleftrightarrow{FS}a_{-k}^*$

Proof: $a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$

$$a_k'=\frac{1}{T}\int_T x^*(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$\overline{\int x(t)dt}=\int\overline{x(t)}\,dt.$

则 $a_k'^*=\frac{1}{T}\left(\int_T x^*(t)e^{-jk\omega_0 t}dt\right)^*=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{jk\omega_0 t}dt$

$=a_{-k}$ $\quad\therefore a_k'=a_{-k}^*$

⑦ Parseval: $\frac{1}{T}\int_T|x(t)|^2dt=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|a_k|^2$

i.e. 一个周期信号总平均功率等于它全部谐波分量平均功率之和

Tip：推性质时若拿不准结果，可推导！

Eg: $x(t)\xleftrightarrow{FS}a_k$, $\quad x(2-t)\xleftrightarrow{FS}a_k'$

若套公式，则：先负后移？还是先移后负？移2还是-2？

不妨：$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$

是因为基波频率不变

$$a_k'=\frac{1}{T}\int_T x(2-t)\,e^{-jk\omega_0 t}dt.$$

$$\overset{t=2-t}{=\!=\!=}\frac{1}{T}\int^T x(t)\,e^{jk\omega_0(t-2)}d(2-t).$$

$$=\frac{1}{T}\int_T x(t)\,e^{jk\omega_0(t-2)}dt=e^{-2jk\omega_0}\cdot a_{-k}.$$

$\left(a_{-k}=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{jk\omega_0 t}dt\right).$

No.

Date

前面介绍了连续情况的周期信号FS，下面介绍离散情况：

$$x[n]=x[n+N] \qquad (31)$$

$$\phi_k[n]=e^{jk\omega_0 n}=e^{jk(2\pi/N)n}, \quad k=0,\pm1,\cdots \qquad (32)$$

但是离散与连续最大的不同在于：

$$e^{j(k+Ni)\omega_0 n}=e^{jk\omega_0 n}\cdot e^{jNi\frac{2\pi}{N}n}=e^{jk\omega_0 n} \qquad (33)$$

这是因为 $e^{ji2\pi n}$ 必为1，$n\in\mathbb{Z}$；但 $e^{ji2\pi t}$ 就不一定了

∴有：$\phi_k[n]=\phi_{k+N}[n]$ (34)

因此：$x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k\phi_k[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$ * (35)

注意！$x[n]$ FS表示中，仅有N项 $a_k e^{jk\omega_0 n}$

*: $k=\langle N\rangle$ 代表 k在N个相继整数区间上变化

故 Discrete Periodic Signal FS 表达由下式决定：

$$\begin{cases} a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\omega_0 n} & (36) \\ x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \end{cases}$$

其中(36)由来与(25)推导高度一致

对于离散形式来说，收敛性不是问题；而性质上与连续情况高度相似，唯有以下变化：

Time scaling: $x[n]\leftrightarrow a_k$, $x_{(m)}[n]=\begin{cases} x[n/m], & m|n \\ 0, & m\nmid n \end{cases}$

则 $x_{(m)}[n]\xleftrightarrow{FS}\frac{a_k}{m}$ (感性理解：$\frac{a_k'}{\infty}\Rightarrow\frac{a_k'}{m\infty}$，则 $a_k\Rightarrow\frac{a_k}{m}$)

Multiplication: $x[n]\xleftrightarrow{FS}a_k$. $y[n]\xleftrightarrow{FS}b_k$，则 $x[n]y[n]\xleftrightarrow{FS}d_k=\sum_{l=\langle N\rangle}a_l b_{k-l}$

⚠ 是两个周期上FS之间周期卷积！不是1个！i.e. d_k 式中必有N项！

一次差分：$x[n]\xleftrightarrow{FS}a_k$, $x[n]-x[n-1]\xleftrightarrow{FS}(1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}})a_k$

Parseville: $\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}|x[n]|^2=\sum_{k=\langle N\rangle}|a_k|^2$

Date

最后：我们知道 $x(t)$ $x[n]$ 如何分解，那么之前提到：

$e^{j\omega t}$ 过LTI的响应很方便求。

下面将推导FS式进入LTI后响应：

连续：$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt$ (37)

则 $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_kH(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$ (38)

离散：$H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]e^{-j\omega n}$ (39)

$y[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_kH(e^{jk\omega})e^{jk\omega n}$ (40)

△：可能 $H(j\omega)$. $H(e^{j\omega})$ 分不清，则可以考虑以下流程：

$x(t)$：则写下：$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt$

再依 $e^{j\omega t}$ 知：$a_{k_0}e^{jk_0\omega_0 t}\Rightarrow H(jk_0\omega_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-jk_0\omega_0 t}dt$

$x[n]$，则写下 $H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]e^{-j\omega n}$

再依 $(e^{j\omega})^n$ 知：$a_{k_0}e^{jk_0\omega_0 n}\Rightarrow H(e^{jk_0\omega_0})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]e^{-j\omega_0 k_0 n}$

其实 z^n & e^{st} 是可以统一的：

$z=e^{j\omega_0}$，$s=j\omega_0$，就都为 $e^{j\omega_0 t}$ 了

那么，对于一个 $e^{jk\omega_0 t}$ 来说，它的幅度因子等于：

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]e^{-jk\omega_0 n}$ $\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$

不必关心是 z^n or e^{st}，$H(?)$ 中 ? 是 $e^{j\omega}$ or $j\omega$