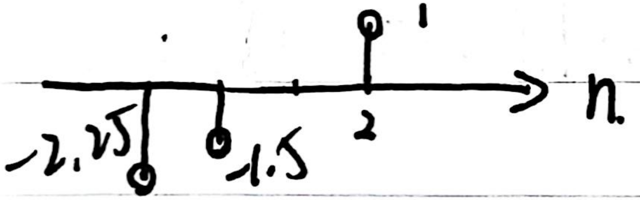
Chapter 2 Lec4

Discrete-Time LTI ← (Linearly Time Invariant) Systems：离散时间时不变系统

如下面信号，可由多个 signal 组合表达：



$$x[n] = -2.25 \times \delta[n+1] - 1.5 \times \delta[n] + \delta[n-2]$$

⇒ An arbitrary sequence can be represented as the weighted sum of shifted unit impulses.

Generally: $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]$

Def: The response of a system to a unit impulse sequence $\delta[n]$ is called impulse response, denoted by $h[n]$

我们有LTI，且知：$\delta[n] \to LTI \to h[n]$

则知：any $k=k_0$: $\delta[n-k_0] \to LTI \to h[n]$

又：我拆分 $x[n]$ 为一个个 $x[k_0]\cdot\delta[n-k_0]$

$\therefore$ $x[k_0]\delta[n-k_0] \to LTI \to x[k_0]h[n-k_0]$

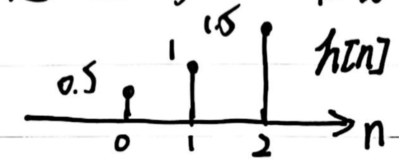
合并有：$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \to LTI \to y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$

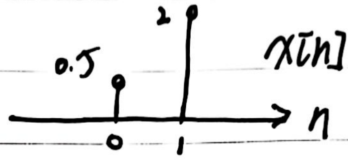
(卷积和)

其中：$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$ is refered to as the convolution-sum

定义道：$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$

例:





求 $x[n] * h[n]$

$x[n]=0.5\delta[n]+2\delta[n-1]$

确定Domain，即k如何遍历：$\{0,1\}$.

然后：$h[n-k]$ 对应的Domain：$[0,1,2]$.

则 n有效范围：$[0,1,2,3]$.

$\therefore$ $y[0]=\sum_{k=0}^{1} x[k]h[n-k] = x[0]h[0]+x[1]h[-1]=0.25$

$y[1] = x[0]h[1]+x[1]h[0] = 1.5$

$y[2] = x[0]h[2]+x[1]h[1] = 2.75$

$y[3] = x[0]h[3]+x[1]h[2] = 3$

例: $y[n]=x[n]*\delta[n]=x[n]$ ← (假设)

则 $y[n]=x[n]*\delta[n-d] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k-d]$ 令 $k+d=k'$

$= \sum_{k'=-\infty}^{\infty} x[k'-d]*\delta[n-k'] = x[n-d]*\delta[n]=x[n-d]$

例: $x[n] \to h[n] \to y[n]$，那么 $x[n] \to h[n-m] \to ?$

$y'[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k-m]$ 令 $k'=k+m$

$= \sum_{k'=-\infty}^{\infty} x[k'-m]h[n-k'] = x[n-m]*h[n] = y[n-m]$

$(y[n]= x[n]*h[n])$

No.

Date

为什么是 $y[n-m] = x[n-m] * h[n]$，而非 $h[n-m]$?

$h[n]$ 是 n_0 处 $\delta[n_0]$ 经过 LTI 的输出.

$x[n] * h[n]$ 代表：$x[n]$ 拆成一个个 $x[n_0]\delta[n-n_0]$.

对于其中一个：$x[n_0]\delta[n-n_0] \to LTI \to x[n_0]h[n-n_0]$

那么 $x[n]$ 平移 m，$y[n]$ 也平移 m，对于原先 n_0 处：

$$y[n_0-m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k-n_0] \cdot h[?-k] \quad ? = n_0 \text{ or } n_0-m.$$

原来一个个拿过来的 $x[k]$，现在要在 $k-n_0$ 处拿过来作系数.

而"贡献度"呢？取系数 $x[?]$ 地方变了，但强度，in another word，"贡献度"的计算，依然是按 n_0 处的来算！

因此仍是 $h[n]$，$y[n]$ 仅平移

另一种解释：LTI 与 $h[n]$ 挂钩，$h[n]$ 决定查看 $\delta[n]$ 的范围

☆ [这也说明为何"$x[n] \to h[n-m] \to$" 与 "$x[n-m] \to h[n] \to$"]

等价，因为 $h[n-m]$ 代表 n_0 处值，在 $x[k_0]$ 下，看的 δ 却是 $\delta[n_0-k-m]$，那么我可以 $x[n-m]$ 以代表 n_0 处，看到的是 $\delta[n_0-k]$，但乘的系数要还原为 $x[k_0-m]$，而这种理解对应的是：$x[n]$ 处处平移，而 $y[n]$ 也因此处处平移

Continuous - Time LTI System:

连续情况：认为 $\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \le t \le \Delta \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$，满足 $\int_0^\Delta \delta_\Delta(t) = 1$ 以作 $x(t)$ 拆分基本单位

依卷积离散形式定义：$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\,\delta_\Delta(t-k\Delta)\,\Delta$

当：$\lim_{\Delta \to 0} \hat{x}(t)$ 时：$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$

如：单位阶跃：$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau = \int_0^{\infty} \delta(t-\tau)\,d\tau$

那么拆分了 $x(t)$，已知 $\delta(t) \to LTI \to h(t)$，则：

$x(t) \to LTI \to y(t)$：$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$

i.e.：$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = x(t) * h(t)$

类似于Discrete情况：有：$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$

细节：$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau-t_0)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau'-t_0)\,\delta(t-\tau')\,d\tau'$

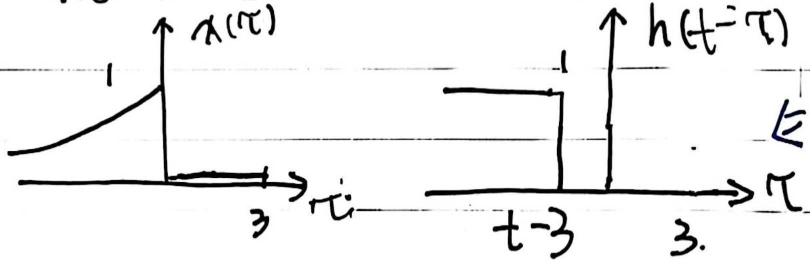
$= x(t-t_0) * \delta(t) = x(t-t_0)$

重要的一种理解：$x(t)$ 提供 coefficient 模板，$\delta(t)$ 提供position

原来 $x(t)$：$x(t) * \delta(t)$：代表 t_0 位置下的强度是 $x(t_0)$

那么模板平移位置不变 等价于模板不变 位置平移

例：$x(t) = e^{2t}u(-t)$，$h(t) = u(t-3)$，$x(t) * h(t) = ?$



⇐ 对 （τ：变量 t：常量）

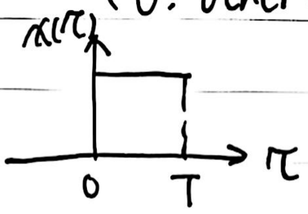
$t-3 \le 0$：$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{t-3} e^{2\tau}\,d\tau = \frac{1}{2}e^{2(t-3)}$

$t-3 > 0$：$x(t) * h(t) = 1/2$

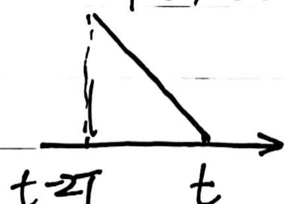
计算卷积核心技术！画/算 $h(t-\tau)$ 的图！且

例：$x(t) = \begin{cases} 1, & 0<t<T \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases}$ $h(t) = \begin{cases} t, & 0<t<2T \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$

$x(\tau)$：

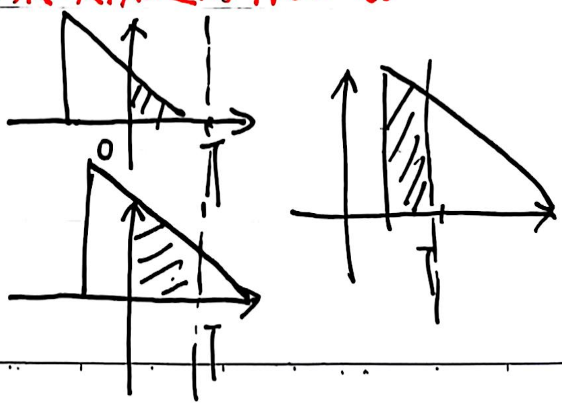


$h(t-\tau)$



但是 t 与 0, T 关系并不清楚，要分类讨论

$x(\tau)$ 值为 1 ($0<t<\tau$)，则卷积结果实质上为 $h(t-\tau)$ 在 $(0, T)$ 间面积



$$y(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \frac{1}{2}t^2, & 0<t<T \\ Tt - \frac{1}{2}T^2, & T<t<2T \\ -\frac{1}{2}t^2 + Tt + \frac{3}{2}T^2, & 2T<t<3T \\ 0, & t>3T \end{cases}$$

Lec5&6

Properties of LTI Systems:

① Commutative Property:

$$x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k] \xlongequal{n-k=m} \sum_{m=-\infty}^{\infty}h[m]x[n-m]=h[n]*x[n]$$

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau) \xlongequal{t-\tau=\tau'} \int_{-\infty}^{\infty}h(\tau')x(t-\tau')d\tau'=h(t)*x(t)$$

② Distribute Property:

$$x[n]*(h_1[n]+h_2[n])=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$$

$$x(t)*(h_1(t)+h_2(t))=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$$

③ Associative Property:

$$x[n]*(h_1[n]*h_2[n])=(x[n]*h_1[n])*h_2[n]$$

$$x(t)*(h_1(t)*h_2(t))=(x(t)*h_1(t))*h_2(t)$$

④ 称 Dis/Con 系统 Without Memory: only if $h[n]=0$ for all $n\neq0$

or: $h(t)=0$ for all $t\neq0$

在这种情况下: $h[n]=k\delta[n]$, $h(t)=k\delta(t)$

$\Rightarrow$ $y[n]=kx[n]$ $y(t)=kx(t)$

⑤ Invertibility of LTI:

若 $h_0(t)*h_1(t)=\delta(t)$, 则称 $h_1(t)$ 是 $h_0(t)$ 的逆; 同理 $h_0[n]*h_1[n]=\delta[n]$

i.e. $x(t)\longrightarrow\boxed{h_0(t)}\longrightarrow\boxed{h_1(t)}\longrightarrow w(t)=x(t)$

例: $h_0[n]=u[n]$, 求其逆:

$u[n]*h_1[n]=\delta[n]$, 而 $\delta[n]=u[n]-u[n-1]=u[n]*[\delta[n]-\delta[n-1]]$ 其 $u[k-\tau]$

$\therefore h_1[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$

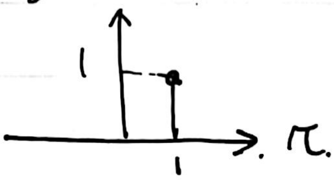
No.

Date

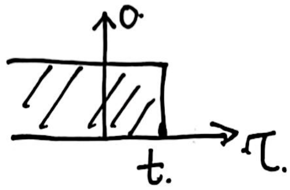
* 一个因果系统的输入某个时刻点以前为0，则其输出在那个时刻以前也必须是零

附：为啥 $u[n]*\delta[n-1]=u[n-1]$：

$\delta[\tau-1]$:



$u[t-\tau]$.



∴ $t<1$ 时：$u[n]*\delta[n-1]=0$

$t\geq 1$, $u[n]*\delta[n-1]=1$.

恰为 $u[n-1]$ 定义

⑥ Causality:

若LTI是因果的，则 $y[n]$ 必须与 $k>n$ 时的 $x[k]$ 无关，则乘以 $x[k]$ 的所有系数 $h[n-k]$ 当 $k>n$ 下必须：$h[n]=0,\ n<0$

此时：$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{0} x[k]h[n-k]=\sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$

同理：$h(t)=0,\ t<0$ 下，$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

$=\int_{-\infty}^{0} x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$

例：$y[n]=\sum_{l=-\infty}^{n} x[l]$: Causal

$h[n]=\sum_{l=-\infty}^{n}\delta[l]=u[n]$ $(h[n]=0 \text{ for } n<0)$

△：线性系统 因果性 $\underset{(等效)}{\Longleftrightarrow}$ 初始松弛条件*

⑦ Stability

设 $x[n]$ 有界，则 $|x[n]|<B$；则：

$$|y[n]|=\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]\right|\leq\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]||x[n-k]|\leq B\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|h[k]|.$$

可见：若单位脉冲响应绝对可和 (absolutely summable), i.e.,

$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|<\infty$，那么 $y[n]$ 有界

同理：$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(\tau)|d\tau<\infty$（绝对可积，absolutely integrable）

那么 $y(t)$ 有界，即稳定

如: $h[n]=\alpha^n u[n]$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\alpha^n|u[n]=\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha^n|=\frac{1}{1-|\alpha|}\quad if\ |\alpha|<1$$

注: if $|\alpha|=1$, unstable!!

⑧ Unit Step Response

除了单位冲激响应，单位阶跃响应 $s[n]$ 或 $s(t)$ 也常用来描述一个线性时不变系统的特性，$s[n]/s(t)$ 是当 $x[n]=u[n]/x(t)=u(t)$ 时的系统输出响应:

$$s[n]=u[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]u[n-k]$$

$k>n$ 时, $u[n-k]=0$

☆ $\therefore s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k]$, 因此 $s[n]-s[n-1]=h[n]$ ☆

同理: $s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$, $h(t)=s'(t)$

Lec 6

Differential or Difference Equations

线性常系数微分方程:

In general: 描述输入输出的关系，但它是一种隐式(implicit)表达

Eg. $\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$, 若 $x(t)=Ke^{3t}u(t)$, $y(t)=?$

Solution: $y(t)=y_p(t)+y_h(t)$ 特解 齐次解: $\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=0$

令 $y_p(t)=Ye^{3t}$, 则 $3Ye^{3t}+2Ye^{3t}=Ke^{3t}$, $y_p(t)=\frac{K}{5}e^{3t}$

$y_h(t)=Ae^{st}$, $Ase^{st}+2Ae^{st}=0$ $s=-2$

$\therefore y(t)=A^{*}e^{-2t}+\frac{K}{5}e^{3t}$, $t>0$

*: Auxiliary Condition is required to determine A

若初始松弛: $y(0)=0$ $\therefore y(t)=\frac{K}{5}(e^{3t}+e^{-2t})u(t)$

↳ 此处: $t<0$, $x(t)=0$, 故: $t<0$, $y(t)=0$

General Case: $\sum_{k=0}^{N}a_k\frac{d^k y(t)}{dt^k}=\sum_{k=0}^{M}b_k\frac{d^k x(t)}{dt^k}$

$y_p(t)$: forced response $y_h(t)$: natural response, $\sum_{k=0}^{N}a_k\frac{d^k y(t)}{dt^k}=0$

Initial rest as auxiliary condition: $x(t)=0$ for $t\le t_0$, $y(t_0)=\frac{dy(t_0)}{dt}=\cdots=\frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}}=0$

差分方程: $\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$

$y[n] = y_p[n] + y_h[n]$; 前者 forced, 后者 natural response

$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0$

Initial rest: $x[n]=0$ for $n \le n_0$

$\therefore y[n_0] = y[n_0-1] = \cdots = y[n_0-(N-1)] = 0$

Recursive Solution:

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\}$$

特别地: 若 $N=0$, 说明解法中无递归. 此时: $y[n] = \frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$

$\Rightarrow h[n] = \frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k]$ Finite Impulse Response (FIR)

例: $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$ Consider $x[n] = K\delta[n]$ and take initial rest: $y[-1]=0$

则: $y[0] = x[0] + \frac{1}{2}y[-1] = K$

$y[1] = x[1] + \frac{1}{2}y[0] = \frac{1}{2}K$

$y[2] = x[2] + \frac{1}{2}y[1] = (\frac{1}{2})^2 K \cdots$

$\therefore y[n] = (\frac{1}{2})^n K$, $h[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$ Infinite Impulse Response (IIR)

同常: $\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$

$\begin{cases} N=0: \text{FIR} \\ N\neq 0: \text{IIR} \end{cases}$, 但并不总是如此

Block Diagram Representation

变形: $y[n] = -ay[n-1] + bx[n]$

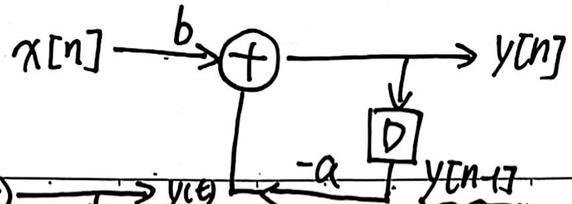
$\boxed{D}$: Differential $\Rightarrow \frac{dy(t)}{d(t)}$

Difference $\Rightarrow y[n-1]$

⊕: 相加

λ: coefficient

$y[n] + ay[n-1] = bx[n]$:



$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$

变形: $y(t) = -\frac{1}{a}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{b}{a}x(t)$