No.

Date

Signals and Systems

信号与系统

Chapter1 Lec 0&1

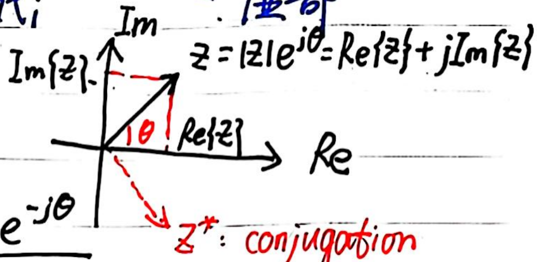
首先回顾复数 (complex) 表达形式:

Cartesian notation: $z = Re\{z\} + j \cdot Im\{z\}$

实部　　这门课中爱用j代i　　虚部

Polar notation: $z = |z| e^{j\theta}$

Euler: $z = |z|e^{j\theta} = |z| \cdot (\cos\theta + j\sin\theta)$



则意味着: $\cos\theta = \dfrac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$, $\sin\theta = \dfrac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2}$

Conjugation: 共轭, $j \Rightarrow -j$

其次,回顾离散中的一些式子:

With some z_0 (possibly complex) number: $\sum_{n=0}^{\infty}(z_0)^n = \dfrac{1}{1-z_0}$　iff: $|z_0|<1$

用它推有: $\sum_{n=0}^{M-1}(z_0)^n = \dfrac{1-z_0^M}{1-z_0}$ (因为 $\sum_{n=0}^{M-1}(z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(z_0)^n - \sum_{n=M}^{\infty}(z_0)^n$)

最后,回顾: Zeros of a complex equation: $z^N - a = 0$

则 $z^N = a = a \cdot e^{j\cdot 2\pi k}$ $\therefore z = a^{\frac{1}{N}} \cdot e^{jk\frac{2\pi}{N}}$, $k = 0, 1, \cdots, N-1$

例: $z^3 = -1$, 则 $z^3 = (-1)^{1/3} \cdot (e^{j\cdot 2k\pi})^{1/3}$

$= (e^{j\pi})^{1/3} e^{jk\frac{2\pi}{3}} = e^{j(\frac{\pi}{3}+\frac{2k}{3}\pi)}$

接下来正式进入 Signals and Systems Overview:

一. Continuous-Time and Discrete-time Signals

Signals, 信号, 可用于描述许多物理现象; 数学上, 信号被表示为一个或多个独立变量的函数。Sound. Video. Image 均为信号

如: Sound 是声压 (acoustic pressure) 关于时间t的 function

Image: RGB-channel value 关于 (x.y) 像素

Video: Image 基础上加t

那么, 信号关于时间连续与否是问题; 目前 focus on signals involving a single independant variable, i.e., time

扫描全能王 创建

No.

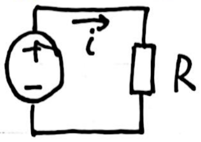
Date

连续时间信号：时间连续，且信号函数值连续

反之，则为离散时间信号

约定有：$x(t)$ 代指连续信号；$x[n]$ 代指离散

例：



$$p(t)=\frac{1}{R}v^2(t)$$

t_1, t_2 间总能量：$E_R=\int_{t_1}^{t_2}p(t)dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{R}v^2(t)dt$

类似地，如统计总能量，而 signal 为 $x(t)/x[t]$

☆ the total energy of signal is defined as：

$$\begin{cases} E=\int_{t_1}^{t_2}|x(t)|^2dt, & \text{连续} \\ E=\sum_{n=n_1}^{n_2}|x[n]|^2, & \text{离散} \end{cases}$$

Average Power：

$$\begin{cases} P=\frac{E}{t_2-t_1}, & \text{连续} \\ P=\frac{E}{n_2-n_1+1}, & \text{离散} \end{cases}$$

上面时间 domain 均有限，无限下：

连续：$E_\infty \triangleq \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt$，$P_\infty \triangleq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt$

离散：$E_\infty \triangleq \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2$，$P_\infty \triangleq \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2$

note：time 在连续时用 t，在离散时用 n

以能量，功率为划分信号种类：

Finite-energy signal：$E_\infty<\infty$

Finite-power signal：$P_\infty<\infty$，$E_\infty=\infty$

Infinite energy & power signal：$P_\infty\to\infty$，$E_\infty\to\infty$

二. Transformations

在 time domain 上变换 signal

1. time shift：$x(t)\to x(t-t_0)$，$x[n]\to x[n-n_0]$

skill：左加右减

time reversal：$x(t)\to x(-t)$，$x[n]\to x[-n]$

扫描全能王 创建

No.

Date

Time scaling: $x(t) \to x(2t)$ 压缩

$x[n] \to x[\frac{n}{2}]$ 拉伸

Summary: $x(t) \to x(\alpha t+\beta)$

$|\alpha|>1$: compressed　　$\alpha<0$, reversed

$|\alpha|<1$: stretched　　$\beta\neq 0$, shifted

可把它们视为 Linear Transformation，但多个算子下，操作要小心！

Eg $x(t) \to x(\frac{3}{2}t+1)$. 可视为：先shift后scale ①

也可视为：先scale后shift ②

① 图像是先左移多少？1 or $\frac{2}{3}$？应为1；再压缩：$\frac{3}{2}$

② 先压缩，后左移多少？应为$\frac{2}{3}$

why? Essentially: $\alpha t+\beta$ 中，拉伸/压缩只影响α

但 shift 作用于 t: $\alpha(t+t_0)+\beta$，β会间接受影响

Periodic Signals: 连续时间下，$x(t)=x(t+T)$ for all t

离散时间下：$x[n]=x[n+N]$ for all N

Even & Odd: 偶：$x(t)=x(-t)$　$x[t]=x[-t]$

奇：$x(t)+x(-t)=0$　$x[t]+x[-t]=0$

⇒ Any signal can be broken into a sum of two signals

$x(t)=x_e(t)+x_o(t)$，其中

$$\begin{cases} x_e(t)=\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)] \\ x_o(t)=\frac{1}{2}[x(t)-x(-t)] \end{cases}$$

三. Exponential and Sinusoidal Signals

通常，指数连续时间信号：$x(t)=Ce^{at}$，C.a 均为复数

当然，C.a 可以取中实数，if so, $x(t)$为 Real exponential signal

那么，它可能表示周期函数吗？若 C.a real num，不行

但 C.a 是 complex number！Polar notation 与 e^ 挂钩！

KOKUYO

扫描全能王 创建

Periodic Exponential Signal: c is real, specifically 1

a是复数，但只有虚部: $x(t)=e^{j\omega_0 t}$

周期多少？欲 $x(t+T)=x(t)$: 有:

$$e^{j\omega_0 t}\cdot e^{j\omega_0 T}=e^{j\omega_0 t}，\text{则: } e^{j\omega_0 T}=e^{2k\pi j}=1$$

$$\therefore T=\frac{2k\pi}{\omega_0}, \quad k=\pm1,\pm2\cdots$$

则 Fundamental period T_0: $k=1$，且T取正，i.e.

$$T_0=\frac{2\pi}{|\omega_0|}$$

特别地: $\omega_0=0$时: $x(t)=1$, T_0 is undefined

而对于 Sinusoidal(正弦曲线)信号，定义为: $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\phi)$

同样，它与 Exponential Signal 紧密相关:

Euler notation: $e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$

Therefore: $x(t)=A\cdot Re\{e^{j(\omega_0 t+\phi)}\}$

显然它也 periodic: $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$, Fundamental frequency: ω_0

ω_0显然有: ω_0越大，T_0越小，频率越快

那么对于这两类 signal，它们在 energy 与 power 上分类如何:

Energy: 不难看出: infinite total energy

Power: 对于 $e^{j\omega_0 t}$ & $A\cos(\omega_0 t+\phi)$ 这两 examples of signal

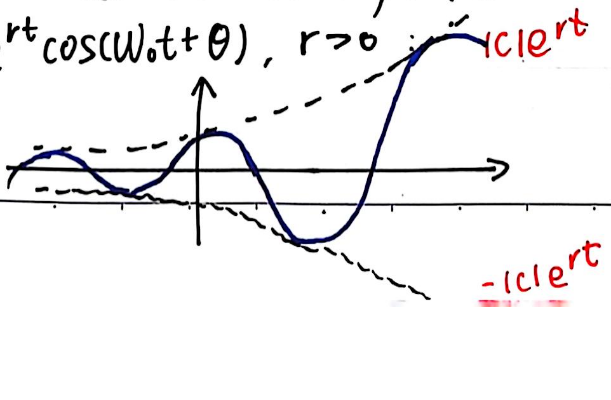
$$P_{expo}=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}|e^{j\omega_0 t}|^2dt=1$$

$$P_{sinu}=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}|Re\{e^{j(\omega_0 t+\phi)}\}|^2dt=1/2$$

那么 $x(t)=Ce^{at}$ general case下: $a=r+j\omega_0$，代入:

$$Ce^{at}=|C|e^{rt}\cos(\omega_0 t+\theta)+j|C|e^{rt}\sin(\omega_0 t+\theta)$$

figure: $|C|e^{rt}\cos(\omega_0 t+\theta)$, $r>0$:



扫描全能王 创建

* oscillation rate: 振荡快慢

*: 实质是: $x[n]=x[-n]=x[n+2\pi]$

~~*: x[n] General case: $x[n]=C\alpha^n$, C α 为复数~~

$x[t]$* 相关推导与结论与先前所述不完全一致!

Harmonically related complex exponentials: 一组 signal:

补: $\{e^{j\omega_0 t}, e^{j\omega_1 t}, \dots\}$ 周期均有 T_0, 则应: $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$, $\omega_i=k\omega_0$

Expo: $x[n]=e^{j\omega_0 n}$ 下, 由于 $n\in\mathbb{Z}$, 无法取中周期函数所有值

则: $0\sim\pi$: $\omega_0\uparrow$, oscillation rate* of $e^{j\omega_0 n}\uparrow$

$\pi\sim2\pi$: $\omega_0\uparrow$, oscillation rate of $e^{j\omega_0 n}\downarrow$

Maximum: $\boxed{\omega_0=\pi}$ 下, $e^{j\pi n}=(e^{j\pi})^n=(-1)^n$

Sinu: 而 $x[n]=\cos(\omega_0 n)$: $0\sim\pi$, $\omega_0\uparrow$, oscillation rate $\uparrow$

$\pi\sim2\pi$: $\omega_0\uparrow$, oscillation rate $\downarrow$

同时, 由于 n 只能 $\in\mathbb{Z}$, 还有特殊之处:

$0<\omega_0<\pi$ 下, $\cos(\omega_0 n)=\cos((2\pi-\omega_0)n)$ *

Periodicity of Discrete:

Expo: $x[n]=e^{j\omega_0 n}$, 为了它 periodic, must:

$e^{j\omega_0(n+N)}=e^{j\omega_0 N}\cdot e^{j\omega_0 n}$

$\therefore$ $\omega_0 N=2\pi m$, m 为 integer

则 $\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{m}{N}$, 若 $m.N$ 无公因数: $N=m\frac{2\pi}{\omega_0}$, $\frac{2\pi}{N}=\frac{\omega_0}{m}$

注意到: N 应 $\in\mathbb{Z}^+$, 即 $m\cdot\frac{2\pi}{\omega_0}$ 应为正整数

如果是 $x(n)=e^{j\omega_0 n}$, 直接 $N=\frac{2\pi}{\omega_0}$, $m=1$ 就可以了

但 $x[n]$, 则应: $\pi|\omega_0$, $\omega_0=\frac{a}{b}\pi$, $a.b$ 互质, $m\cdot\frac{2b}{a}\in\mathbb{Z}$.

Summary:

	$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n}$
	不同 ω_0, 不同 signal	$\omega=\omega_0+2k\pi$ 下, 同一信号
	任何 ω_0, 均有周期	必须 $\frac{2\pi m}{\omega_0}$ 对某 N m 下为 N *
Fundamental 频率	ω_0	ω_0/m ← 相关!
Fundamental 周期	$2\pi/\omega_0$	$N=m(2\pi/\omega_0)$

* 即: 仅当 $\omega_0=2\pi\cdot\frac{m}{N}$ 形式才有可能, $m.N$ 为整数

扫描全能王 创建

No. *: only consider interval $0 \le \omega_0 \le 2\pi$ or $-\pi \le \omega_0 \le \pi$

Date

上述内容有点乱，但核心在于：t连续，n离散，从而：

$$e^{j(\omega_0+2\pi k)n} = e^{j\omega_0 n} \cdot e^{j2\pi kn} = e^{j\omega_0 n},$$

但 $e^{j(\omega_0+2\pi k)t} = e^{j\omega_0 t} \cdot e^{j2\pi k \cdot t}$，但 $k \cdot t$ 不一定为整数

这解释了：$e^{j\omega_0 n}$ 与 $e^{j\omega n}$，$\omega = \omega_0 + 2k\pi$ 为同一信号*

而在 $\omega_0 \in [0, 2\pi)$ 中，又有乾坤：从事实出发发现：

ω_0: $0 \sim \pi$，$\omega_0 \uparrow$，振荡速率 $\uparrow$；$\pi \sim 2\pi$，$\omega_0 \uparrow$，振荡速率 $\downarrow$

Advanced Theory:

为何 discrete 下，信号发生如此大的变化？因为

discrete 相当于是时间维度上降采样

采样更低频，因此发生了走样 (aliasing) 现象

Lec 3

四. The Unit Impulse and Unit Step Functions

Unit impulse: $\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$ 单位脉冲，也称单位样本(sample)

(离散时间情况下)

Unit step: $u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$ 单位阶跃

离散时间单位脉冲是离散时间单位阶跃的一次差分：

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

相反有：step 是 sample 的求和：$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$

也表示为：$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$

单位脉冲采样下：$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$ (Sampling Property)

($\delta[n]$ 只在 $n=0$ 时，$\delta[n] \neq 0$；单位样本时：$\delta[n] = 1$)

而如果欲考虑发生在 $n = n_0$ 处的单位脉冲：

$$x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0]$$

扫描全能王 创建

连续时间下: $u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$ ⚠它在t=0处不连续

而 u(t)也可视为单位冲激的积分:

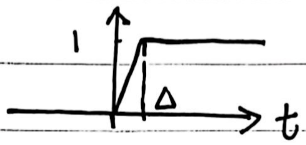
$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau$, 令σ=t-τ, $u(t)=\int_{0}^{\infty}\delta(t-\sigma)\,d\sigma$

"$\int \to d/d$", 连续时间下, δ(t)可视为u(t)一次微分:

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{d(t)}$$

但 u(t)在t=0下不连续, 应该不可微啊! 于是考虑 $u_\Delta(t)$.

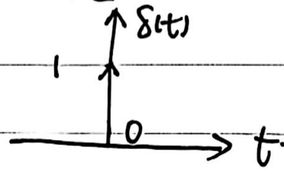
它用了Δ时间由0变成1, 则视 u(t)为 $\lim_{\Delta\to0}u_\Delta(t)$



则: $\delta_\Delta(t)=\dfrac{du_\Delta(t)}{dt}$

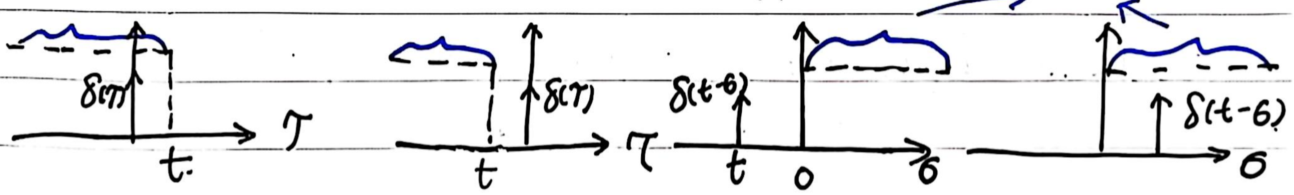
而 $\delta(t)=\lim_{\Delta\to0}\delta_\Delta(t)$

因此, 用下图表示δ(t), 代表脉冲面积集中于t=0



回到: $u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d(\tau)=\int_{0}^{\infty}\delta(t-\sigma)\,d\sigma$

可视化积分区间如下: 固定是0~∞



Sampling Property

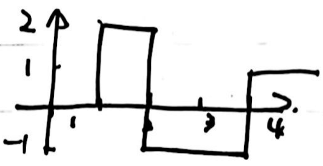
x(t)可以视为: $x_1(t)=x(t)\delta_\Delta(t)$, $[0,\Delta]$外, $x_1(t)=0$, $\Delta\to0$

则推有: $x(t)\delta_\Delta(t)\approx x(0)\delta_\Delta(t)$

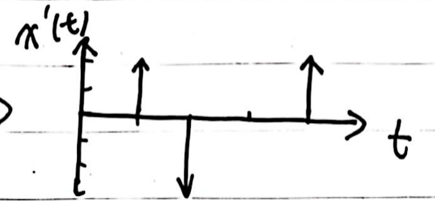
则 $\lim_{\Delta\to0}x(t)\delta_\Delta(t)=x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)$

More generally: $x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$

Example: $x(t)$:



⇒



$x(t)=2u(t-1)-3u(t-2)+2u(t-4)$

$\Rightarrow x'(t)=2\delta(t-1)-3\delta(t-2)+2\delta(t-4)$

KOKUYO
扫描全能王 创建

五: Continuous-Time and Discrete-Time Systems

例: 连续: Moving Car:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{m}[f(t) - \rho v(t)] \qquad \frac{dv(t)}{dt} + \frac{\rho}{m}v(t) = \frac{1}{m}f(t)$$

☆ In general: $\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$

离散: 银行 account: $y[n] = 1.01\,y[n-1] + x[n]$

☆ In general: $y[n] + ay[n-1] = bx[n]$

Interconnection systems:

Series: Input → sys1 → sys2 → Output

Parallel: Input → sys1, sys2 → ⊕ → Output

Feedback: Input → ⊕ → sys1 → Output; sys2 → ⊕

六. Basic System Properties

Without memory: 输出只与输入有关

With memory: depend on current & previous inputs

Invertible: 不同输入 → 不同输出

Noninvertible: 不可逆, 如: $y(t) = x^2(t)$, $y[n] = 0$

Causality: (有因果关系): the output at any time depends only on the inputs at the present time and in the past

Eg: $y(t) = x(t+1)$: Non-causal $t+1$: 未来值

Stability: small inputs lead to responses that do not diverge
(不正规说法)

扫描全能王 创建

正规说法: bounded input leads to bounded output

Example: $y(t)=tx(t)$ Unstable

因为: $x(t)$有界, 但t无界时, $x(t)$输入有界, $y(t)$无界

Time Invariance: ☆ 时不变性

A time shift in the input signal results in an identical time shift in the output signal

if $x[n]\to y[n]$, Then $x[n-n_0]\to y[n-n_0]$, 则它时不变

Eg: $y(t)=\sin[x(t)]$, 若: $x(t)\to y(t)$

则: $y(t-t_0)=\sin[x(t-t_0)]$ 成立

但 $y[n]=nx[n]$ 若$x[n]\to y[n]$

则: $nx[n-n_0]=y'\neq y=(n-n_0)x[n-n_0]$

Linearity $x_1(t)\to y_1(t)$ $x_2(t)\to y_2(t)$

$ax_1(t)+bx_2(t)\to ay_1(t)+by_2(t)$

Eg. $y(t)=tx(t)$ 若 $x_3(t)=ax_1(t)+bx_2(t)$

则 $y_3(t)=t(ax_1(t)+bx_2(t))=ay_1(t)+by_2(t)$

Recall: Basic Property of System

① Memoryless or not: 系统输出仅取决于该时刻输入

如: $y[n]=(2x[n]-x^2[n])^2$

典型有记忆: 如 $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$

$y[n]=x[n-1]$

BTW: 理解: $x[?]\xrightarrow{I} y[n]$: $x[n]$记录了n时刻下的信号

而I拿到这个(些)来自不同时间可能的信号进行处理, 输出$y[n]$

如$y[n]=x[n-1]$, 就是输入$n-1$时刻下的Input Signal, 作(Identity)恒等操作, 得到n时刻下的输出$y[n]$

△ 该定义下, 只有仅依赖于current input才是memoryless.

其余均 not memoryless, 即使可能依赖于future!

KOKUYO

扫描全能王 创建

② 可逆性：若不同输入，则不同输出，说明可逆

若可逆，则有逆系统存在，如：

$$x(t) \rightarrow \boxed{y(t)=2x(t)} \xrightarrow{y(t)} \boxed{w(t)=\tfrac{1}{2}y(t)} \rightarrow w(t)=x(t)$$

更甚者：$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$，它也可逆，因为：

$w[n]=y[n]-y[n-1]$，w[n] 系统有记忆也可以！

但 $y(t)=x(t)^2$ 就不可逆，因为：

若 $\exists t_1, t_2$：$x(t_1)+x(t_2)=0$，则 $w(t)=\sqrt{y(t)}$ 失效

③ 因果性：任何时刻输出仅与现在 or 过去输入有关

如 $y[n]=x[n]-x[n-1]$

欲判断因果性，要检验全部时间点的输入-输出关系

如 $y[n]=x[-n]$，$n<0$ 时，y[n] 取决于未来

且：要把输入信号的影响与系统定义中所用到的其它函数的影响区分开！

如 $y(t)=x(t)\cos(t+1)$，$\cos(t+1)$ 是 function，not signal

因此该系统 casual & memoryless

④ 稳定性：

如果怀疑不稳定，则找特定的有界输入，使系统输出无界

Eg：$y(t)=t\,x(t)$，$x(t)\equiv 1$，$t\to\infty$，$y(t)\to\infty$，unstable

若认为稳定，则需证明：

Eg：$y(t)=e^{x(t)}$，若 $|x(t)|<B$，$B>0$，则

$e^{-B}<y(t)<e^{B}$，即：$|y(t)|\in(e^{-B}, e^{B})$

$\therefore$ stable

扫描全能王 创建

(即:y中t=t-t0与x中t=t-t0下,两系统是否一样)

⑤ 时不变性

看 $y(t)$ 中 $t=t-t_0$ 的结果造成的信号中的 time shift 是否也是 t_0;当且仅有输入 time shift 能造成 $y(t-t_0)$
当然,若怀疑时变,找反例亦可

Eg: $y(t)=\sin[x(t)]$:

令 $y_1(t)=\sin[x_1(t)]$. $x_2(t)=x_1(t-t_0)$

则 $y_2(t)=\sin[x_2(t)]=\sin[x_1(t-t_0)]=y_1(t-t_0)$

注意: $x_1(t)$ $x_2(t)$ $y_1(t)$ $y_2(t)$ 均为系统而非值

$y(t)=tx(t)$: $y_1(t)=tx_1(t)$.

$x_2(t)=x_1(t-t_0)$ $y_2(t)=tx_2(t)=tx_1(t-t_0)$

$y_2(t)\neq y_1(t-t_0)$,故时变

"时刻"是对于t来说的,不是2t!

$y(t)=x(2t)$ $y_1(t)=x_1(2t)$. $x_2(2t)=x_1(2(t-t_0))$

则 $y_2(t)=x_1(2t-2t_0)\neq y_1(t-2t_0)$

为何是"$-2t_0$"?因为 time shift 上 $x_1(2t)$ 与 $x_1(2t-2t_0)$ 在时间维度上就是差了 $\boxed{2t_0}$.

扫描全能王 创建