第十章 z变换

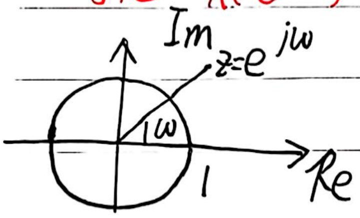
Recall: $y[n] = H(z) z^n$ $\quad H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n}$.

Def: $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$ $\quad X(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$

与FT有何关联？ 若 $z = e^{j\omega}$，$|z|=1$：则：

$$X(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \mathcal{F}\{x[n]\}$$

可见 $X(e^{j\omega})$ 相当于是在一个单位圆里面取 z：



而z变换是在复平面内取值

Eg: $x[n] = a^n u[n]$，求 $X(z)$？

Solution: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$

$$= \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a| \qquad |z|>1.$$

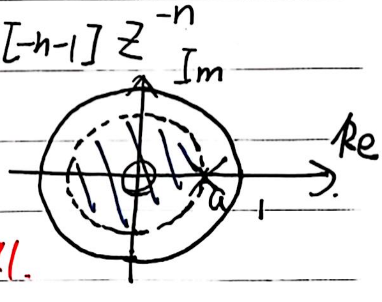
i.e., $a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{z}{z-a}$. $|z|>|a|$；且 $a=1$：$u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-z^{-1}}$

这个 $|z|>|a|$ 就是ROC

Eg. $x[n] = -a^n u[-n-1]$，则 $X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[-n-1] z^{-n}$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n$$

若 $|z|<|a|$，则 $X(z) = \frac{z}{z-a}$ $\qquad$ ROC: $|z|<|a|$.



从上述例子中看出，z变换ROC有一些性质：

① $X(z)$ ROC是z平面内以原点为中心的圆环

② ROC不含极点

③ 若 $x[n]$ 是有限长序列，则ROC为整个平面，可能除去 $z=0$ and/or $z=\infty$

④若 $x[n]$ 为右边序列，且 $|z|=r_0$ 的圆在ROC内，则 $|z|>r_0$ 的全部有限 z 值都一定在这个ROC内

关于③：
$$\begin{cases} \text{不含 } z=0 \text{ or } z=+\infty, & N_1<0,\ N_2>0 \\ \text{不含 } z=0, & N_1\geq 0 \\ \text{不含 } z=\infty, & N_2\leq 0 \end{cases}$$

假设在 $N_1<n<N_2$ 下，$x[n]\neq 0$，$x[n]$ is of finite duration

⑤若 $x[n]$ 为左手序列，$|z|=r_0$ 圆在ROC内，则 $0<|z|<r_0$ 也在ROC内
⑥若 $x[n]$ 为双边序列，$|z|=r_0$ 在ROC内，则ROC为包含 $|z|=r_0$ 的圆环

Eg. $x[n]=\begin{cases} a^n, & 0\leq n\leq N-1,\ a>0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ 它有限长，依③，则ROC应为平面除去(可能) $z=0/\infty$

且：$-1<n<N$，可见是不含 $z=0$ or $z=\infty$

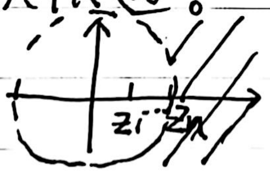
$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \frac{1}{z^{N-1}}\frac{z^N-a^N}{z-a}$，可见 $z\neq 0$

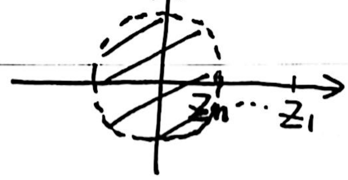
$\therefore$ ROC：除去 $z=0$ 的全部 z 值

但貌似 z 也不为 a 啊？但事实上 $z^N-a^N=(z-a)(z^{N-1}+\cdots)$

$z-a$ 一项可以消去 $(N\geq 1)$

⑦如果 $x[n]$ 的 z 变换 $X(z)$ 是有理的，则ROC被极点界定，或延伸至无限远。

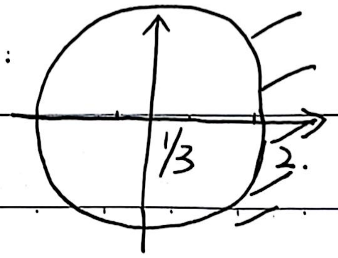
右手信号：

左手 

Eg. $X(z)=\frac{1}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-2z^{-1})}$，$x[n]$？ ($x[n]$ 有FT)

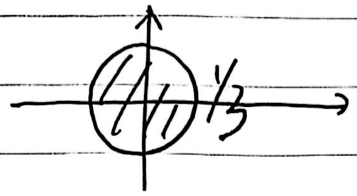
仅凭 $X(z)$，无从判定 $x[n]$！

若为右手：



不含单位圆
FT不存在！

左手：



不含单位圆，FT不存在！

只能双边　　△: $z=e^{j\omega}$，$X(z) \Rightarrow X(e^{j\omega})$，故若FT存在，必包含单位圆！

Z逆变换：

$X(re^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\}$，其中r为ROC内 $z=re^{j\omega}$ 模

$x[n]e^{-n} = \mathcal{F}^{-1}\{X(re^{j\omega})\}$

$$\Rightarrow x[n] = r^n \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})(re^{j\omega})^n d\omega$$

$$\therefore x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz$$

$\oint$：在半径为r，以原点为中心的封闭圆上沿逆时针方向环绕一周的积分

Eg. $X(z) = \dfrac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$，$|z|>1/3$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \longrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

当然ROC不同，x[n]不同

if $1/4<|z|<1/3$，$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$

Eg：$X(z) = 4z^2+2+3z^{-1}$，$0<|z|<\infty$

如：$\delta[n+n_0] \overset{Z}{\longleftrightarrow} z^{n_0}$

故：$x[n] = 4\delta[n+2]+2\delta[n]+3\delta[n-1]$

No.

Date

这个式子提供了一个审视 z 变换的视角：z的幂级数

如重新看： $X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}$ ，$|z|>|a|$. *

$(1-az^{-1})^{-1}=1+az^{-1}+a^2z^{-2}+\cdots$

$\Leftrightarrow\ a^n u[n]=\sum_{n_0=0}^{\infty} a^{n_0}\delta[n-n_0]$

*：$|z|>|a|$，$|az^{-1}|<1$，则可用上述公式展开

若 $|z|<|a|$ 呢？ $|a^{-1}z|<1$，令 $a^{-1}z=x$

$\frac{1}{1-x^{-1}}=\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}=1-\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

$=1-(1+x+x^2\cdots)=-a^{-1}z-a^{-2}z^2\cdots$

$=\sum_{n_0=-1}^{-\infty}-a^{n_0}\delta[n-n_0]=-a^n u[-n-1]$

Eg： $X(z)=\log(1+az^{-1})$. $|z|>|a|$.

$|az^{-1}|<1$，$\log(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}t^n}{n}$.

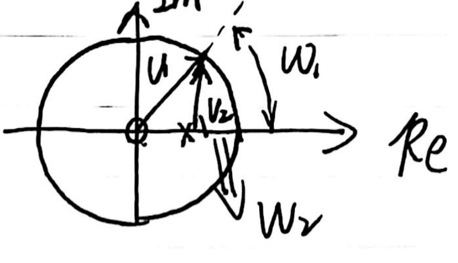
$\therefore X(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}a^n z^{-n}}{n}$

$\Leftrightarrow\ \sum_{n_0=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n_0+1}a^{n_0}\delta[n-n_0]}{n_0}=\frac{-(-a)^n}{n}u[n-1]$

利用 pole-zero 图对FT进行几何求值

一阶系统： $h[n]=a^n u[n]$，$H(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}$ $(|z|>|a|)$

若 $|a|<1$，ROC含单位圆，h[n] FT收敛并等于 $H(e^{j\omega})$



频率响应 $\begin{cases}\text{模：} |v_1|/|v_2| \\ \text{相位：} w_1-w_2\end{cases}$

喜闻乐见环节：Z变换性质

线性：$a x_1[n] + b x_2[n] \xleftrightarrow{z} aX_1(z)+bX_2(z)$，R包括 $R_1 \cap R_2$

时移：$x[n-n_0] \xleftrightarrow{z} z^{-n_0}X(z)$，ROC=R，且原点或无穷远点可能加上或除掉

Z域变换：$z_0^n x[n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{z}{z_0}\right)$，ROC = $|z_0|R$

时间反转：$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$，ROC=R

$x[-n] \xleftrightarrow{z} X(z^{-1})$，ROC = $\frac{1}{R}$

时间扩展（压缩不考虑，因为aliasing）

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & k|n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \qquad R$$

$x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{z} X(z^k)$，ROC = $R^{1/k}$

Proof: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$

$X(z^k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-kn}$

$= \cdots + x[-1]z^{k} + x[0] + x[1]z^{-k} + \cdots$

若有 z^{-m} 一项，则 $k|m$ 即 z^{-m} 系数在 $k|m$ 为 $x[k/m]$，在 $k\nmid m$ 下为0，故它逆变换后为 $x_{(k)}[n]$

共轭：$x^*[n] \xleftrightarrow{z} X^*(z^*)$，ROC=R

卷积：$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z)X_2(z)$，ROC包含 $R_1 \cap R_2$

一次差分：$x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{z} (1-z^{-1})X(z)$

且 ROC=R，但可能去掉 $z=1$ 的极点或增加 $z=0$ 的极点。

累加：$w[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \xleftrightarrow{z} \left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)X(z)$

ROC包含 $R \cap \{|z|>1\}$

Z域微分：$n x[n] \xleftrightarrow{z} -z\frac{dX(z)}{dz}$，ROC=R

Eg. $X(z) = \log(1+az^{-1})$，$|z|>|a|$，求 $x[n]=?$

Solution: $-z\frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}}$，$|z|>|a|$

而：$a\cdot(-a)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{a}{1+az^{-1}}$，再利用时移：$a(-a)^{n-1}u[n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}}$

$x[n] = -\frac{(-a)^n}{n} u[n-1]$

初值定理: if $x[n]=0$ for $n<0 \Rightarrow x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$

最后, 有许多 common z-transform pair

会单开一篇与Laplace一起展示

用z变换可描述LTI特征:

Causal $\Longleftrightarrow$ $H(z)$ ROC 是圆外部分, 包含无穷

若一个系统 $H(z)$ 有理且因果 $\Longleftrightarrow$ ROC是最外极点外部

且 $H(z) = \frac{D(z)}{N(z)} = \frac{z^{p}+\cdots}{z^{q}+\cdots}$, $p \le q$

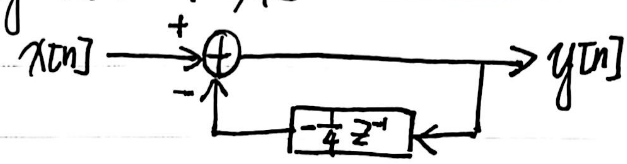
Stable $\Longleftrightarrow$ $H(z)$ ROC 包含单位圆, i.e., $|z|=1$

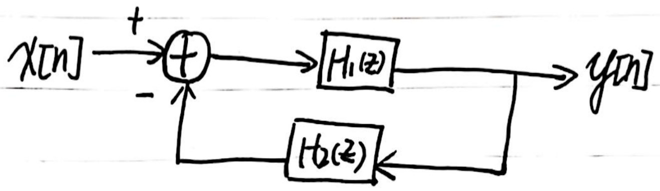
$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \Longleftrightarrow Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

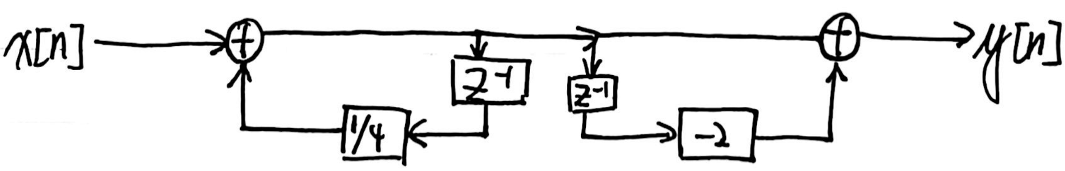
Block Paradigm: $\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H_1(z)}{1+H_1(z)H_2(z)}$:

Eg: $H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$:

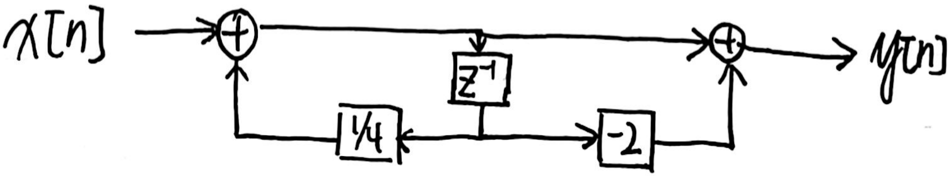




Eg: $H(z) = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right)(1-2z^{-1})$



Or:

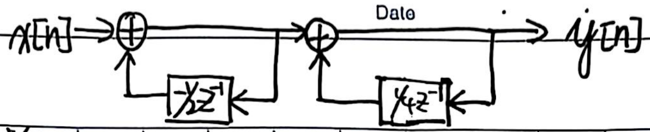


同样 block diagram 有三种: Cascade, Parellel, Direct

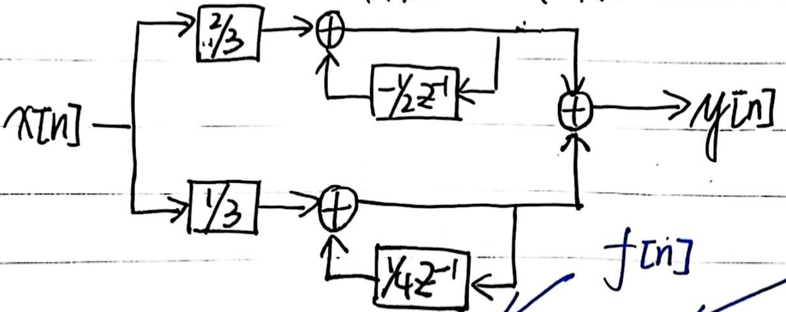
Example: $H(z) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}$

Cascade:

$H(z) = \dfrac{1}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}$

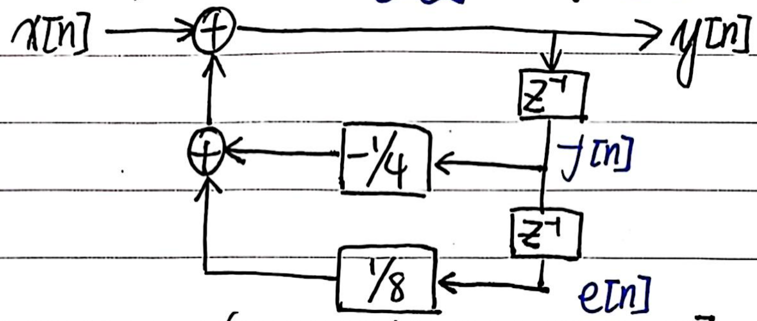


Parellel: $H(z) = \dfrac{2/3}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \dfrac{1/3}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$



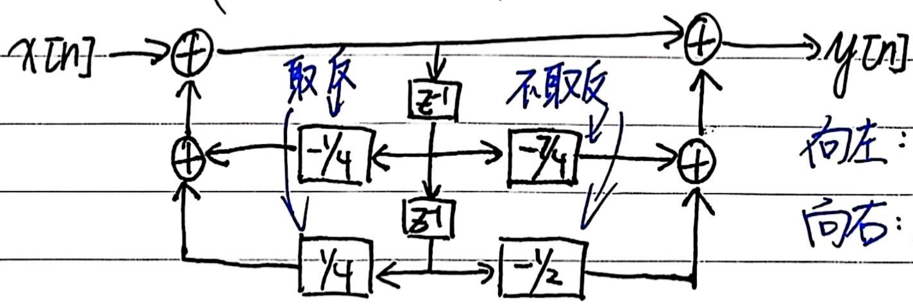
f[n] f[n-1] = e[n]

Direct: $y[n] = -\frac{1}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] + x[n]$



* z^{-1}一次，差分一次！

Eg: $H(z) = \left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}\right)\left(1-\frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}\right)$



向左：取反

向右：不取反

Unilateral z变换

$x[n] \overset{UZ}{\longleftrightarrow} \mathcal{X}(z) = UZ\{x[n]\}$, $\mathcal{X}(z) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$

可见：若 $x[n]=0$ if $n<0$，则 $\mathcal{X}(z) = X(z)$

Eg: $x[n] = a^{n+1}u[n+1]$, $X(z) = \dfrac{z}{1-az^{-1}}$ （时移）

$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} z^{-n} = UZ\{a^{n+1}u[n]\} = \dfrac{a}{1-az^{-1}}$, $|z|>|a|$

它的性质与z变换主要有以下不同：

① Time Delay: $x[n-1] \longleftrightarrow z^{-1}\mathcal{X}(z) + x[-1]$

② Time Advance: $x[n+1] \longleftrightarrow z\mathcal{X}(z) - zx[0]$

③ Convolution: $x_1[n] * x_2[n] \longleftrightarrow \mathcal{X}_1(z)\mathcal{X}_2(z)$

Date

First Difference: $x[n]-x[n-1] \longleftrightarrow (1-z^{-1})X(z) - x[-1]$

最后: Solving differential equations using unilateral z变换

相当于 UL 求解中:

$y(t)|_{0^-} = y[-1]$，然后找 zero-input & zero-state response

且!

: $y[n-1] \longleftrightarrow z^{-1}Y(z) + y(-1)$

(UL: $y'(n) \longleftrightarrow sY(s) - y(0^-)$)

Eg: $y[n]+3y[n-1] = x[n]$, $x[n]=\alpha u[n]$. $y[-1]=\beta$. $y[n]=?$

Solution: $Y(z)+3\beta+3z^{-1}Y(z) = \dfrac{\alpha}{1-z^{-1}}$

$$Y(z) = \underbrace{\overset{x[n]=0}{\frac{-3\beta}{1+3z^{-1}}}}_{\text{zero-input}} + \underbrace{\overset{x[n]=\alpha u[n]}{\frac{\alpha}{(1+3z^{-1})(1-z^{-1})}}}_{\text{zero-state}} \Rightarrow y[n]$$

基本函数的拉普拉斯变换

$x(t)$	$\mathcal{L}\{x(t)\}$	ROC
$\delta(t)$	1	全部s
$u(t)$	$1/s$	$Re\{s\}>0$
$-u(-t)$	$1/s$	$Re\{s\}<0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$Re\{s\}>0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$Re\{s\}<0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re\{s\}>-a$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re\{s\}<-a$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$Re\{s\}>-a$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$Re\{s\}<-a$

$x(t)$	$\mathcal{L}\{x(t)\}$	ROC
$\delta(t-T)$	e^{-sT}	全部s
$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$Re\{s\}>0$
$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$Re\{s\}>0$
$e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$Re\{s\}>-a$
$e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$Re\{s\}>-a$
$u_n(t)=\frac{d^n\delta(t)}{dt^n}$	s^n	全部s
$u_{-n}(t)=\underbrace{u(t)*\cdots u(t)}_{n次}$	$\frac{1}{s^n}$	$Re\{s\}>0$

常用Z变换对:

$x[n]$	变换	ROC
$\delta[n]$	1	全部z
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert>1$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert<1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	全部z除去 $\begin{cases}0, & m>0\\ \infty, & m<0\end{cases}$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$
$r^n\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-r(\cos\omega_0)z^{-1}}{1-2r(\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>r$
$r^n\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{r(\sin\omega_0)z^{-1}}{1-2r(\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>r$