Chapter 5. Discrete FT

$X(e^{jw})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-jwn}$

$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{jw})e^{jwn}dw$

FS⇔FT: $a_k=\frac{1}{N}X(e^{jw}),\ w=k\cdot\frac{2\pi}{N}$

FT无收敛问题(∫有限区间)

但是要有FT: 应 $\sum|x[n]|^2/|x[n]|<\infty$

· Periodic signal: $x[n]=e^{jw_0n}$

$X(e^{jw})=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(w-w_0-2\pi l)$

⇔ $x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_ke^{jk(2\pi/N)n}$

$X(e^{jw})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi a_k\delta(w-\frac{2\pi k}{N})$

· Property ① Time shift $x[n-n_0]\xleftrightarrow{F}e^{-jwn_0}X(e^{jw})$

② w shift: $e^{jw_0n}x[n]\xleftrightarrow{F}X(e^{j(w-w_0)})$

③ $x^*[n]\xleftrightarrow{F}X^*(e^{-jw})$

if x[n] real: $X(e^{jw})=X^*(e^{-jw})$

Re{$X(e^{jw})$}: even; Im{$X(e^{jw})$}: odd

④ $x[-n]\xleftrightarrow{F}X(e^{-jw})$

→ Ev{x[n]} $\xleftrightarrow{F}$ Re{$X(e^{jw})$}

Od{x[n]} $\xleftrightarrow{F}$ jIm{$X(e^{jw})$}

⑤ $x[n]-x[n-1]\xleftrightarrow{F}(1-e^{-jw})X(e^{jw})$

$\sum_{m=-\infty}^{n}x[m]\xleftrightarrow{F}\frac{1}{1-e^{-jw}}X(e^{jw})+\pi X(e^{j0})\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(w-2\pi k)$

⑥ $x_{(k)}[n]\xleftrightarrow{F}X(e^{jkw})$, $x_{(k)}[n]=\begin{cases}x[n/k], & k|n\\ 0\end{cases}$

⑦ $nx[n]\xleftrightarrow{F}j\frac{dX(e^{jw})}{dw}$

⑧ $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(e^{jw})|^2dw$

⑨ $y[n]=x[n]*h[n]$, $Y(e^{jw})=X(e^{jw})H(e^{jw})$

$y[n]=x[n]\cdot h[n]$,

⑩ $Y(e^{jw})=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\theta})H(e^{j(w-\theta)})d\theta$

⑪ Duality in FS (Discrete)

$f[n]\Leftrightarrow f[k]\xrightarrow{FS}g[n]$

$\xrightarrow{FS}\frac{1}{N}g[-k]$

InFT: $x[n]\to x[kw_0]$(常)

↓FT ⇕FS.

$X(e^{jw})=g(w)\Leftarrow g(t)$(连续).

$\sum_{k=0}^{N}a_ky[n-k]=\sum_{k=0}^{M}b_kx[n-k]$

$H(e^{jw})=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_ke^{-jkw}}{\sum_{k=0}^{N}a_ke^{-jkw}}$

常见FT Discrete 对

$\sum_{k=\langle N\rangle}a_ke^{jk(\frac{2\pi}{N})n}\leftrightarrow 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\delta(w-\frac{2\pi k}{N})$

$e^{jw_0n}\leftrightarrow 2\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta(w-w_0-2\pi l)$

$\cos(w_0n)$ & $\sin(w_0n)$: 利用 e^{jw_0n}

$x[n]=1\leftrightarrow 2\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta(w-2\pi l)$

$x[n]=\begin{cases}1, & |n|\le N_1\\ 0, & N_1<|n|\le N/2\end{cases}$, $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-kN]$

⇕ ⇕

$2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\delta(w-\frac{2\pi k}{N})$ | $\frac{2\pi}{N}\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(w-\frac{2\pi k}{N})$

$a^nu[n],|a|<1\leftrightarrow\frac{1}{1-ae^{-jw}}$

$\delta[n]\ \cdots$

$x[n]=\begin{cases}1, & |n|\le N_1\\ 0, & |n|>N_1\end{cases}\leftrightarrow\frac{\sin[w(N_1+\frac12)]}{\sin(w/2)}$

$\frac{\sin(Wn)}{\pi n}=\frac{W}{\pi}\mathrm{sinc}(\frac{Wn}{\pi})\leftrightarrow X(w)=\begin{cases}1, & [0,W]\\ 0, & [W,\pi]\end{cases}$ T=2π, 周期

$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}a^nu[n]\leftrightarrow\frac{1}{(1-ae^{-jw})^r}$

$u[n]\leftrightarrow\frac{1}{1-e^{-jw}}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\pi\delta(w-2\pi k)$

$\delta[n-n_0]\leftrightarrow e^{-jwn_0}$

Chapter 9 Laplace Transform

· $X(s)\triangleq\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt$, $x(t)\xleftrightarrow{L}X(s)$

· $X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$ → zero o, → pole x

· X(s) ROC: ⊥虚轴, 不含 poles

Property: ① x(t) finite, 且绝对可积 则ROC为整个s-平面 ⚠

② 若x(t) right-sided, if Re{s}=σ0 在ROC中, 则s>σ0在ROC中; vice versa (left)

③ 若right sided, X(s)有理, 则ROC: 最右pole右边; left: 最左pole左边

· $x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}ds$

Properties: $x(t-t_0)\xleftrightarrow{L}e^{-st_0}X(s)$, R

$e^{s_0t}x(t)\xleftrightarrow{L}X(s-s_0)$, R+Re{$s_0$}

$x(at)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{|a|}X(\frac{s}{a})$, aR

$x^*(t)\leftrightarrow X^*(s^*)$, R

$x_1(t)*x_2(t)\leftrightarrow X_1(s)X_2(s)$, R含$R_1\cap R_2$

$\frac{dx(t)}{dt}\leftrightarrow sX(s)$, ROC含R

$-tx(t)\leftrightarrow\frac{dX(s)}{ds}$, R 双初值

$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\leftrightarrow\frac{1}{s}X(s)$, R∩{Re{s}>0}

· if x(t)=0 for t<0, $x(0^+)=\lim_{s\to\infty}sX(s)$

and t→∞, finite, $\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{s\to0}sX(s)$

· LTI system

有理H(s) LTI causal⟺最右pole之右

stable⟺ROC含虚轴

Δ: $\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)dt=0\Leftrightarrow H(0)=0$

· 单边LT: $\mathcal{X}(s)\triangleq\int_{0^-}^{\infty}x(t)e^{-st}dt$

Property(不同): $\frac{dx(t)}{dt}\xleftrightarrow{UL}sX(s)-x(0^-)$ 响应 zero-state

For LTI: 左右ULT 用, 有zero-input

常见LT:

$\delta(t)\leftrightarrow1$, All s; $-u(-t)\leftrightarrow\frac1s$, Re{s}<0

$u(t)\leftrightarrow1/s$, Re{s}>0; $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s^n}$

$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)\leftrightarrow\frac{1}{s^n}$, Re{s} <0 / >0

$e^{-at}u(t)$, $-e^{-at}u(-t)$ ⇒ $\frac{1}{s+a}$, Re{s} >-a / <-a

$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$, $-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t)$ ⇒ $\frac{1}{(s+a)^n}$, Re{s} >-a / <-a

$\delta(t-T)\leftrightarrow e^{-sT}$, all s

$\cos(w_0t)u(t)\leftrightarrow\frac{s}{s^2+w_0^2}$, Re{s}>0

$\sin(w_0t)u(t)\leftrightarrow\frac{w_0}{s^2+w_0^2}$, Re{s}>0

$e^{-at}\cos(w_0t)u(t)\leftrightarrow\frac{s+a}{w_0^2+(s+a)^2}$, Re{s}>-a

$e^{-at}\sin(w_0t)u(t)\leftrightarrow\frac{w_0}{(s+a)^2+w_0^2}$, Re{s}>-a

$u_n(t)=\frac{d^n\delta(t)}{dt^n}\leftrightarrow s^n$, all s

$u_{-n}(t)=u(t)*\cdots*u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s^n}$, Re{s}>0

Chapter 10 Z变换

$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}$

$X(z)|_{z=e^{jw}}=F\{x[n]\}$

☆: FT相关 ⇒ 单位圆

ROC Property: ① ROC为圆(ring)

② ROC: where $x[n]r^{-n}$收(绝对可积)

③ ROC不含pole ④ 若x[n]有限序列, 则ROC为z平面, 可能除去z=0/∞

④ 若x[n] right-sided, |z|=r0在ROC中, 则|z|>r0在ROC中 (similar for left 0<|r|<r0)

⑤ FT收, 则含单位圆

⑥ F{$a^nh[n]$} 相当于z变换在|z|=|a|处

· $x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz$

· Property: $x[n-n_0]\leftrightarrow z^{-n_0}X(z)$, R 可能降 0 drop

scale尺: $z_0^nx[n]\leftrightarrow X(z/z_0)$, $|z_0|R$

$e^{jw_0n}x[n]\leftrightarrow X(e^{-jw_0}z)$, R

$x[-n]\leftrightarrow X(\frac1z)$, 1/R

$x_{(k)}[n]=\begin{cases}x[n/k], & k|n\\ 0\end{cases}$

则 $x_{(k)}[n]\leftrightarrow X(z^k)$, ROC=$R^{1/k}$

$x^*[n]\leftrightarrow X^*(z^*)$, R; $R_1\cap R_2$

$x_1[n]*x_2[n]\leftrightarrow X_1(z)X_2(z)$, ROC含

$x[n]-x[n-1]\leftrightarrow(1-z^{-1})X(z)$, 可降0/∞

$\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]\leftrightarrow\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$, R∩{|z|>1}

$nx[n]\leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}$, R

$x[0]=\lim_{z\to\infty}X(z)$ ⇐ ⚠ (if x[n]=0, n<0)

. LTI: 因果: 最外pole向外且分子z阶不能高于分母

Stability: 含单位圆; 对于causal LTI stable⟺all poles在○内 ☆!

· 单边z变换 $\mathcal{X}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}$

Property(不同):

$x[n-1]\leftrightarrow z^{-1}\mathcal{X}(z)+x[-1]$

$x[n+1]\leftrightarrow z\mathcal{X}(z)-zx[0]$

$x[n]-x[n-1]\leftrightarrow(1-z^{-1})\mathcal{X}(z)-x[-1]$

用它展开(Uz)左移式, W&F zero-input & state

常见z变: $\delta[n]\leftrightarrow1$, all z

$u[n]\leftrightarrow\frac{1}{1-z^{-1}}$, |z|>1

$-u[-n-1]\leftrightarrow\frac{1}{1-z^{-1}}$, |z|<1

$\delta[n-m]\leftrightarrow z^{-m}$, All z 可除 {0 if m>0; ∞ if m<0}

$a^nu[n]\leftrightarrow\frac{1}{1-az^{-1}}$, |z|>|a|

$-a^nu[-n-1]\leftrightarrow\frac{1}{1-az^{-1}}$, |z|<|a|

$na^nu[n]\leftrightarrow\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$, |z|>|a|

$[\cos w_0n]u[n]\leftrightarrow\frac{1-\cos w_0z^{-1}}{1-2\cos w_0z^{-1}+z^{-2}}$, |z|>1

$\sin w_0n\,u[n]\leftrightarrow\frac{\sin w_0z^{-1}}{1-2\cos w_0z^{-1}+z^{-2}}$, |z|>1

$r^n\cos w_0n\,u[n]\leftrightarrow\frac{1-r\cos w_0z^{-1}}{1-2r\cos w_0z^{-1}+r^2z^{-2}}$, |z|>r

$r^n\sin w_0n\,u[n]\leftrightarrow\frac{r\sin w_0z^{-1}}{1-2r\cos w_0z^{-1}+r^2z^{-2}}$, |z|>r

Chapter 6. 时域与频域特征

$X(jw)=|X(jw)|e^{j\angle X(jw)}$ 可视为x(t)的分解; |X(jw)|可看成x(t)能谱密度。∠X(jw): 相对相位信息

$Y(jw)=|H(jw)||X(jw)|e^{j(\angle H(jw)+\angle X(jw))}$

Group Delay: 线性相位特征系统有一个简单的意义就是时移

$\angle H(jw)=-\phi-\alpha w$

群延迟: $\tau(w)=-\frac{d}{dw}\{\angle H(jw)\}$.

伯德图: $20\log_{10}|H(jw)|$ & $\angle H(jw)$ — $\log_{10}(w)$

单位: dB

一阶系统: $\tau\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=bx(t)$

$H(jw)=\frac{b}{jw\tau+a}$

$20\log_{10}|H(jw)|=-10\log_{10}[(w\tau)^2+1]$

$\angle H(jw)=-\tan^{-1}(w\tau)$

$=-20\log_{10}(w)-20\log_{10}(\tau)$

Chapter 7 Sampling

冲激采样: $p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$

$x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\cdot\delta(t-nT)$

$X_p(jw)=\frac1T\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j(w-kw_s))$

∴ $w_s>2w_M$, $w_s=\frac{2\pi}{T}$

Zero-order:

x(t) → ⊗ p(t) → $x_p(t)$ → $h_0(t)$ → $x_0(t)$ → $h_r(t)$, $H_r(jw)$ → x(t)

$H_0(jw)=e^{-jwT/2}[\frac{2\sin(wT/2)}{w}]$

$H_r(jw)=e^{jwT/2}H(jw)/(\frac{2\sin(wT/2)}{w})$

Band-Limit 插值:

x(t) → ⊗ → $x_p(t)$ → H(jw) → $x_r(t)$, $x_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\frac{Tw_c}{\pi}$ [?]

H(jw): T, w_c; $h(t)=\frac{Tw_c}{\pi}\frac{\sin w_ct}{w_ct}$

[?] $=\frac{\sin w_c(t-nT)}{w_c(t-nT)}$ | First order:

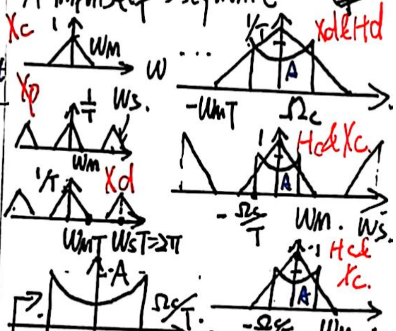
$H(jw)=\frac1T[\frac{\sin(wT/2)}{w/2}]^2$, h(t)

DT Processing of CT signal

$x_c(t)$ → ⊗ p(t) → $x_p(t)$ → [A] → $x_d[n]$ → [Hd] → $y_d[n]$ → [B] → $y_p(t)$ →

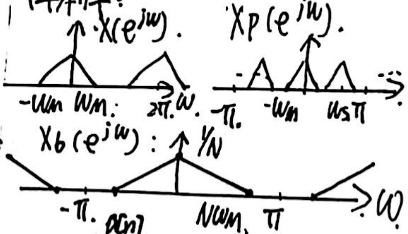
[T, $w_s/2$] → $y_c(t)$. B: sequence → impulse

A: Impulse串 → sequence



Hc: $x_c(t)$ → $H_c(jw)$ → $y_c(t)$: 等价

降采样:



x[n] → ⊗ p[n] → $x_p[n]$ → Deci → $x_b[n]$

$x_b[n]=x_p[nN]$, $X_b(e^{jw})=X_p(e^{jw/N})$

$x(at)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}X(\frac{jw}{a})$; Direct: X变换, 分母系数图中取反, 分子不; z^{-1} ⇒ [z^{-1}] 表示.

Laplace: 分母系数取反, 分子不从高阶到低阶, 降一阶, 1个 [s^{-1}]

Z: 从1, z^{-1}排下去 Laplace: s^k, s^{k-1} 排下去

Bode: 横: 惯: $\frac{a}{jw}$, w×10, ↓20dB; ... $\frac{a}{T}$ & $\frac{a}{T}$