Chapter 3

$e^{st} \to H(s)e^{st}$

$z^n \to H(z)z^n$

FS

$H(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$

$H(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$

$s=j\omega,\ z=e^{j\omega}$

· $\phi_k(t)=e^{jk\omega_0 t}$，谐波关系

· 若 $x(t)$ 为实信号，则：$(x^*(t)=x(t))$

$x(t)=a_0+2\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos(k\omega_0 t+\theta_k)$

$\begin{cases} a_n=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \\ x_n=\sum_k a_k e^{jk\omega_0 t} \end{cases}$ $\boxed{1}$

· 收敛条件：① T内能量有限

② $\int_T |x(t)|dt<\infty$；$\int_T |x(t)|^2dt<\infty$

③ T内有限个max. min

④ 有限时间内，只可有有限个不连续点

· 性质：$x(t-t_0) \xleftrightarrow{FS} e^{-jk\omega_0 t_0}a_k$

$x(-t) \xleftrightarrow{FS} a_{-k}$

$x(\alpha t) \xleftrightarrow{FS} a_k$（但基波频率变了）

$x(t)y(t) \xleftrightarrow{FS} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$

$\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau \xleftrightarrow{FS} Ta_kb_k$ $\boxed{2}$

$x^*(t) \xleftrightarrow{FS} a^*_{-k}$ | $e^{jM\omega_0 t}x(t) \xleftrightarrow{FS} a_{k-M}$

$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FS} jk\omega_0 a_k$

$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{FS} \frac{1}{jk\omega_0}a_k$ $\boxed{2}$

$x(t)$ 实偶，a_k 实偶；

$x(t)$ 实奇，a_k 纯虚奇

$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_k|^2$

△ $|x(t)|^2=x(t)\cdot x^*(t)$

△：方波 FS（T，T_1）.

$a_k=\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$

$a_0=2T_1/T$ 连续 离散

$\begin{cases} a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\omega_0 n} \\ x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \end{cases}$ $\boxed{3}$

$a_k=a_{k+N}$

△：方波 FS（N_1，N）.

$a_k=\frac{1}{N}\frac{\sin[2k\pi(N_1+1/2)/N]}{\sin(k\pi/N)}$

$a_0=\frac{2N_1+1}{N}$

· 性质（与连续不同）

$x_m[n]=\begin{cases} x[n/m], & m|n \\ 0, & m\nmid n \end{cases}$

$\xleftrightarrow{FS} \frac{1}{m}a_k$ $\boxed{4}$

$x[n]y[n] \xleftrightarrow{FS} \sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{k-l}$

（△：两个周期上）

$x[n]-x[n-1] \leftrightarrow (1-e^{-jk\omega_0})a_k$

$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \leftrightarrow (1-e^{-jk\omega_0})^{-1}a_k$

（仅 $a_0=0$ 时，才为有限值且为周期的）

$\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}|x[n]|^2=\sum_{k=\langle N\rangle}|a_k|^2$

· FS & LTI $\boxed{5}$

$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$

$H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$

$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$

$y[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k H(e^{jk\omega_0})e^{jk\omega_0 n}$

Chapter 4 FT

$\boxed{6}$

$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$

FT收敛条件：↑

· 周期的FT： $\boxed{7}$

△ $\begin{cases} X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0) \\ x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \end{cases}$

· 性质：$x(t-t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$

$e^{j\omega_0 t}x(t) \xleftrightarrow{F} X(j(\omega-\omega_0))$

$x^*(t) \xleftrightarrow{F} X^*(-j\omega)$ $\boxed{8}$

$x(-t) \xleftrightarrow{F} X(-j\omega)$

$x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|}X(\frac{j\omega}{a})$

$x(t)*y(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)Y(j\omega)$

$x(t)y(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\theta)Y(j(\omega-\theta))d\theta$

$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega X(j\omega)$

$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$

△ $tx(t) \xleftrightarrow{F} j\frac{dX(j\omega)}{d\omega}$

$x_e(t) \Rightarrow Re\{X(j\omega)\}$

$x_o(t) \Rightarrow jIm\{X(j\omega)\}$

对偶性质

$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|^2d\omega$

· 解系统： $\boxed{9}$

$\sum_{k=0}^{N} a_k\frac{d^k y(t)}{dt^k}=\sum_{k=0}^{M} b_k\frac{d^k x(t)}{dt^k}$

则 $H(j\omega)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k(j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k(j\omega)^k}$

基本FT对：

$F\{e^{jk\omega_0 t}\}=2\pi\delta(\omega-k\omega_0)$

$F\{1\}=2\pi\delta(\omega)$ $\boxed{10}$

$x(t)=\begin{cases} 1, & |t|<T_1 \\ 0, & T_1<|t|\le T/2 \end{cases}$，

$x(t+T)=x(t)$，则

$F\{x(t)\}=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi k}{T})$

$x(t)=\begin{cases} 1, & |t|<T_1 \\ 0, & |t|>T_1 \end{cases}$ $F\{x(t)\}=\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$

$F\{\delta(t)\}=1$ $F\{u(t)\}=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$

$F\{\delta(t-t_0)\}=e^{-j\omega t_0}$

$F\{e^{-at}u(t)\}=\frac{1}{a+j\omega}$

$F\{te^{-at}u(t)\}=\frac{1}{(a+j\omega)^2}$

$F\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)\}=\frac{1}{(a+j\omega)^n}$

$F\{e^{-a|t|}\}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$ $(a>0)$

Chapter 1

$E=\int_{t_1}^{t_2}|x(t)|^2dt$，$P=\frac{E}{t_2-t_1}$

$E=\sum_{n=n_1}^{n_2}|x[n]|^2$，有限

$P=E/(n_2-n_1+1)$

$E_\infty=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt$，连

$P_\infty=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt$

$E_\infty=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2$，

$P_\infty=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2$

F-E：$E_\infty<\infty$ F-P：$P_\infty<\infty$

I-E&P：P_∞, E_∞ $E_\infty=\infty$

$\alpha t+\beta$，拉/压 $\Rightarrow \alpha$，shift $\Rightarrow \beta$

Expo Sign：Ce^{at}，$C=1$

a 仅有虚部，$T_0=\frac{2\pi}{|\omega_0|}$

Sinu Signal：$A\cos(\omega_0 t+\phi)$

$T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$；两信号的 F-P：

$P_{expo}=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}|e^{j\omega_0 t}|^2dt=1$

$P_{sinu}=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}|Re\{e^{j(\omega_0 t+\phi)}\}|^2dt$

Oscillation Rate $|=1/2$

Expo：$0\sim\pi$，$\omega_0\uparrow$ rate↑

$\pi\sim2\pi$，$\omega_0\downarrow$，rate↓

Sinu：$0\sim\pi$，$\omega_0\uparrow$，rate↑

$\pi\sim2\pi$，$\omega_0\downarrow$，rate↓

离散信号周期：

$\omega_0 N=2\pi m$，$N=m\cdot\frac{2\pi}{\omega_0}$

$\delta[n]=u[n]-u[n-1]$ △ $\boxed{11}$

$\delta(t)=du(t)/dt$

$\delta(t)$ 脉冲面积集中于 $t=0$

$x(t)=2u(t-1) \Rightarrow x'(t)=2\delta(t-1)$

System Property：current

Memoryless：输出只与输入有关

Invertible：不同输入，不同输出

Causality：输出只与现在&过去输入有关

Stability：bounded in → bounded out

Time Invariance：$x[n-n_0]$

$\to y[n-n_0]$ $\boxed{12}$

△：$y[n]=x[-n]$：$n<0$，糠！

则不 causal

[1]：微/差分，⊕相加

[1]：积分

Chapter 2

$\delta[n]$ 过LTI后的output记作 $h[n]$

$x[k_0]\delta[n-k_0] \to LTI \to x[k_0]h[n-k_0]$

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]=x[n]*h[n]$

· $x[n] \to h[n-m] \to y[n-m]$ ⚠

$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$ $x[\tau]h[n-m-\tau]$

· Properties：$\boxed{13}$ $\boxed{14}$

① 交换：$x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$

② 分配 ③ $[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)$

$=x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$

④ 无记忆：$n\neq0$，$h[n]=0$；$h(t)=0$，$t\neq0$.

⑤ 可逆性：$h_0(t)*h_1(t)=\delta(t)$

Eg $h_0[n]=u[n]$，$\delta[n]=u[n]-u[n-1]$

$=u[n]*[\delta[n]-\delta[n-1]]$，$\therefore h_1[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$

⑥ 因果性：$h[0]=0$，$t<0$；$h(t)=0$，$t<0$

△：初始松弛条件：在某一时刻前 input为0，则对应 output 也应为0。

⑦ 稳定：$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|h[k]|<\infty$，$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(\tau)|d\tau<\infty$

Unit Step Response. △ $\boxed{15}$ 应

$s[n]/s(t)$ 为 $x[n]=u[n]/x(t)=u(t)$ 时的响应

$s[n]-s[n-1]=h[n]$，$s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k]$

$h(t)=s'(t)$，$s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$

特解：设与 $x(t)$ 同形式；齐次解，Ae^{st}

初始松弛 $y(0)=0$ $\boxed{16}$

$\sum_{k=0}^{N}a_k\frac{d^k y(t)}{dt^k}=\sum_{k=0}^{M}b_k\frac{d^k x(t)}{dt^k}$

则初松：$x=0$ $t\le t_0$：$y(t_0)=\dots=\frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}}=0$

[1] FS对（连续）

[2] FS性质（连续）

[3] FS对（离散）

[4] FS性质（离散）

[5] FS & LTI（$x(t)$. $H(j\omega) \Rightarrow y(t)$）. $x[n]$ $H(e^{j\omega}) \Rightarrow y[n]$

[6] FT对 [7] $X(j\omega)$ & a_k 关系

[8] FT性质 [9] 解系统

[10] 基本FT对 [11] $\delta[n]$. $u[n]$

[12] system性质 [13] 卷积

[14] 卷积性质（[15] Unit Step Response）.

[16] 解微差分方程

Duality：$x_1(t) \to X_2(j\omega)=X_1(\omega)$，

$x_2(t)=F^{-1}\{x_1(\omega)\}$，$x_2(t)$ 中 $t=-t$，

然后 t. w 名义对调